

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

PROFMAT

**GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA COM TRATAMENTO
VETORIAL**

Robson Vieira da Silva

Vitória - Espírito Santo

Abril de 2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

**“Geometria Analítica no Ensino Médio: Uma Proposta com
Tratamento Vetorial”**

Robson Vieira da Silva

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional
submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 09/04/2013 por:

Fábio Júlio Valentim - UFES

Rosa Elvira Quispe Ccoyllo - UFES

Fábio Luiz Borges Simas – UNIRIO/RJ

Robson Vieira da Silva

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA COM TRATAMENTO VETORIAL

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim

Dissertação de mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Vitória - Espírito Santo

Abril de 2013

À
minha querida noiva, Letícia.
Aos meus pais, Aurino e Marisa.
À minha avó, Conceição (em
memória).

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo imenso esforço e sacrifício despendido durante toda minha vida acadêmica.

A todo o corpo docente do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, em especial aos professores da Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Junior e Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, pelos conhecimentos transmitidos e pela dedicação aos alunos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo suporte financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, pela confiança e por sua contribuição essencial para este trabalho.

Aos colegas e amigos do mestrado pelos dois anos de convivência e enriquecimento intelectual.

À minha noiva, Letícia Schots de Oliveira, pelas contribuições em meu texto e pela paciência nesses dois anos.

Resumo

Baseado na ementa de Geometria Analítica presente no currículo básico das escolas públicas do Espírito Santo, nós propomos uma abordagem vetorial para o assunto. Isso porque, com base em análises de livros didáticos utilizados no Ensino Médio, foi possível constatar a ausência de vetores na citada disciplina, embora o método aplicado à Geometria Analítica facilite seu ensino e aprendizagem. Sob esse prisma, produzimos um material que traz como principal diferencial a introdução de vetores e sua aplicabilidade, demonstrada, também, em exercícios. Do mesmo modo, tratamos de equação de reta e trouxemos algumas considerações no que diz respeito a vetores na disciplina de Geometria Analítica Espacial. Nesse contexto, foi possível simplificar o entendimento de conceitos fundamentais e possibilitar uma maior transição entre a Álgebra e a Geometria.

Palavras-chave: Geometria Analítica, vetores, Ensino Médio, livros didáticos, equação de reta.

Abstract

Based on the course program of Analytic Geometry present in the basic curriculum of the State of Espírito Santo public schools, we propose a vectorial approach for the subject. That's because, with base in analyses of textbooks used in the High School, it was possible verifying the absence of vectors in the mentioned discipline, although the method applied to the Analytic Geometry facilitates your teaching and learning. Under that prism, we produced a material that brings as main differential the introduction of vectors and your applicability, demonstrated also, in exercises. In the same way, we mentioned the straight line equation and we brought some considerations concerning to vectors in the discipline of Space Analytic Geometry. In that context, it was possible to simplify the understanding of fundamental concepts and to make possible a larger transition between the Algebra and the Geometry.

Keywords: Analytic Geometry, vectors, High School, textbooks, equation on straight line.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 O ENSINO DE MATEMÁTICA E A GEOMETRIA ANALÍTICA	4
2 EXAME DE TEXTOS: ANÁLISE DE LIVROS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO	9
3 VERIFICAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS	15
3.1 Análise do Livro “ Matemática: Ciência e Aplicações ” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.	16
3.2 Análise do Livro “ Matemática: Contexto e Aplicações ” de Luiz Roberto Dante.	18
3.3 Análise do Livro “ Matemática ” de Manoel Rodrigues Paiva.	26
4 A PROPOSTA DE MATERIAL	29
4.1 Objetivos	30
4.2 Público alvo e pré-requisitos	32
4.3 Recomendações metodológicas e dificuldades previstas	32

5	PROPOSTA DE ATIVIDADE	34
5.1	COORDENADAS	34
5.1.1	Coordenadas na reta	34
5.1.2	Coordenadas no Plano	35
5.1.3	Distância entre dois pontos	37
5.1.4	Exercícios	40
5.2	VETORES NO PLANO	43
5.2.1	Segmentos equipolentes	43
5.2.2	Vetor no plano	45
5.2.3	Operações com vetores	47
5.2.4	Produto interno	49
5.2.5	Projeção ortogonal de um vetor	54
5.2.6	Área do paralelogramo e do triângulo	55
5.2.7	Exercícios	57
5.3	ESTUDO DA RETA	58
5.3.1	Equações paramétricas	58
5.3.2	Equação cartesiana ou geral da reta	60
5.3.3	Equação reduzida da reta	62
5.3.4	Exercícios	65
5.4	UM POUCO DE GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL	67

5.4.1	Coordenadas no espaço	67
5.4.2	Vetores no espaço	68
5.4.3	Produto interno	70
5.4.4	Retas no espaço	71
5.4.5	Exercícios	72
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

Lista de Figuras

1	Projeção ortogonal de um vetor	2
5.1	Reta orientada	35
5.2	Sistema de coordenadas (cartesiana)	36
5.3	Pontos no plano	37
5.4	Quadrantes	38
5.5	Distância entre pontos no plano	39
5.6	Exemplo	41
5.7	Segmento orientado AB	43
5.8	Segmentos orientados opostos	44
5.9	Segmentos orientados	45
5.10	Representantes do vetor	46
5.11	Operações com vetores	49
5.12	Ângulo entre dois vetores	51
5.13	Ângulo de dois vetores	52

5.14	Projeção ortogonal de um vetor	55
5.15	Área do Paralelogramo	56
5.16	Para $m > 0$, $y = mx + n$ é crescente.	63
5.17	Para $m < 0$, $y = mx + n$ é decrescente.	64
5.18	Para $m = 0$, $y = mx + n$ é constante.	65
5.19	Interseção de retas	66
5.20	Sistema de coordenadas no espaço	68
5.21	Ponto P	69
5.22	Distância de pontos no espaço	70

INTRODUÇÃO

A presente dissertação, sob o tema “Geometria Analítica no Ensino Médio: Uma Proposta com Tratamento Vetorial”, teve como principal objetivo a elaboração de uma proposta de texto de Geometria Analítica, de utilização direta na sala de aula pelos docentes, bem como pelos estudantes.

Os livros didáticos adotados no Ensino Médio das escolas brasileiras deixam uma lacuna ao não darem um tratamento vetorial à Geometria Analítica. Além disso, abordam-na como um conteúdo desconexo da realidade. Problemas em que o aluno tem que escolher onde colocar o plano cartesiano praticamente inexistem.

Por isso, a proposta foi desenvolvida com essa peculiaridade de incluir o tratamento vetorial no estudo. Outro aspecto foi introduzir a resolução de problemas em que não apareçam equações, coordenadas e a Geometria Analítica.

Como metodologia de pesquisa teórica, por análise de conteúdo foi adotada a pesquisa bibliográfica, para produzir uma proposta de abordagem da Geometria Analítica sob uma ótica vetorial, buscando o equilíbrio entre conceituação, manipulação e aplicação.

Baseando-se nesse propósito, a execução deste estudo ocorreu em três etapas distintas e, ao mesmo tempo, complementares.

Organizamos o presente texto em cinco capítulos, em que discutimos sobre o ensino de Geometria Analítica, os livros didáticos e tecemos alguns detalhes acerca da proposta de material/atividade para, em seguida, apresentá-la.

No Capítulo 1, intitulado “O Ensino de Matemática e a Geometria Analítica”, falamos um pouco sobre o que se espera de um bom ensino de matemática. Destacamos as três componentes: conceituação, manipulação e aplicações apresentadas por Elon Lages Lima, para que o ensino se dê de forma equilibrada e coerente.

No Capítulo 2, denominado “Exame de Textos: Análise de livros de Matemática do Ensino Médio”, é apresentada uma revisão desta literatura no que tange à Geometria Analítica. De uma forma geral, foram destacados os principais problemas e virtudes dos livros didáticos analisados e apresentadas sugestões para uma melhor abordagem do tema.

No Capítulo 3, “Verificação de Livros Didáticos Atuais” escolheu-se três livros didáticos, lançados em 2012, de autores e editoras diferentes. Esses mesmo livros foram examinados em 2001, em versões anteriores. A intenção era verificar se algo havia mudado. Se as sugestões apresentadas pelos examinadores foram incorporadas nessas novas versões. Todavia, constatamos que muitos problemas persistem mesmo passados 11 anos.

Essas etapas revelaram que uma das questões principais apontadas pelo livro “Exame de Textos” e que perduram até os dias atuais, é a total falta de uma abordagem vetorial da Geometria Analítica. Motivados por esse fato, dedicamos na etapa seguinte a criação de uma proposta de material/atividade utilizando vetores.

No Capítulo 4, sob o título “A Proposta de Material/Atividade”, abordamos a motivação que nos levou a elaborar essa sugestão. Indicamos o público alvo, os pré-requisitos, recomendações metodológicas e possíveis dificuldades.

No Capítulo 5 apresentamos a nossa proposta, que se divide em quatro partes:

Coordenadas, em que apresentamos como estabelecer o plano cartesiano e calcular distâncias entre pontos.

Vetores no plano, no qual fazemos, de forma simples e objetiva, a introdução de vetores, como operá-los e destacamos o produto interno.

Estudo da reta, no qual discutimos três tipos de equações de retas: paramétricas, cartesiana e reduzida. Sempre que possível, foi feita uma abordagem vetorial ao estudo da reta.

Por fim, um pouco de Geometria Analítica espacial, em que apresentamos como os vetores no espaço tridimensional podem ser usados como uma extensão natural de vetores no plano.

Capítulo 1

O ENSINO DE MATEMÁTICA E A GEOMETRIA ANALÍTICA

Detentor de várias medalhas em diversas olimpíadas internacionais de matemática, o Brasil figura, não raramente, nas últimas posições em avaliações mundiais sobre educação. Como exemplo, cita-se o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) de 2009, realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) em que o País ficou em 53º no ranking geral composto por 65 nações. Diante disso, diversos profissionais ligados à educação têm destinado considerável esforço na tentativa de melhorar o ensino brasileiro.

Um dos grandes pontos a serem melhorados é o ensino básico de matemática, que tem se mostrado precário ao longo dos anos. Embora o Brasil conte com grandes universidades e com reconhecida produção científica na área de matemática, o país não consegue formar bons professores para o ensino básico, os livros didáticos apresentam falhas e o sistema de ensino, como está organizado, não ajuda muito.

Para alguns educadores, a didática é o elemento mais importante no processo de ensino-aprendizagem e, por isso, acabam por não dar o devido valor para o conteúdo. De outro lado, estão os formalistas, adeptos de uma axiomatização exagerada, tornando a

matemática pedante e tediosa. O que a história mostra é que no ensino de matemática não há lugar para posições extremas. É preciso ter bom senso.

Para Lima (2007), a matemática é bem mais que um encadeamento lógico de proposições. Um bom ensino de matemática, que garanta o equilíbrio e o sucesso no processo de ensino e aprendizagem, deve levar em conta três componentes indissociáveis: a conceituação, a manipulação e a aplicação.

Segundo o mesmo autor, a conceituação é a formulação correta das definições, com nítida compreensão e livre de ambiguidades. É o raciocínio lógico-dedutivo, distinguindo hipóteses e teses e diferenciando uma afirmação de sua recíproca. Destaca ainda que esta componente é indispensável para o bom resultado das aplicações.

Já a manipulação é o treinamento a fim de se obter a habilidade necessária para o manuseio e a fluência de equações, fórmulas e operações simbólicas e numéricas que visam o desenvolvimento de atitudes automáticas, tornando-se reflexos condicionados para que o usuário possa concentrar sua atenção em pontos realmente relevantes.

No que diz respeito à aplicação, esta consiste na conexão entre o abstrato e a realidade. O emprego de noções teóricas para obter resultados, conclusões e previsões em situações e problemas reais é que faz o ensino da matemática tão difundido e necessário. Os conceitos matemáticos não são apenas teóricos, não são um fim em si mesmo. As aplicações mostram toda a beleza e flexibilidade. A matemática está em toda parte no nosso cotidiano, seja em relações comerciais ou em complexas modelagens industriais.

Nos anos de 1950, nos Estados Unidos, na França e na Bélgica cresceu um movimento de reforma do ensino da matemática, a fim de promover mudanças profundas para transformar a matemática vigente naquilo que ficou conhecido como a matemática moderna. O currículo tornou-se um dos pontos centrais dessa reforma com a inclusão de novos tópicos e pela inserção da linguagem e notação dos conjuntos.

Ávila (2010) afirma que os promotores da reforma defendiam a inclusão de progressos mais recentes, como álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e

teoria dos conjuntos. Além disso, consideravam que tudo deveria ser apresentado sobre o rigor das demonstrações e de estruturas axiomáticas.

No Brasil, não tardaria a chegada das ideias reformistas da matemática moderna. A partir da década de 60, norteadas pela filosofia estrangeira, as mudanças estruturais nos currículos visavam incluir uma forte predominância do formalismo e noções abstratas. Uma evidência desse movimento no Brasil é a produção de material didático da época. Porém, os professores não estavam preparados para usar esse novo material. A Matemática Moderna no Brasil não alcançou o êxito esperado por seus entusiastas.

Segundo Lima (2007), a imitação da matemática moderna no país resultou em abandono da Geometria e dos Cálculos Numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desconexo da realidade. Este período deixa transparecer sua evidente preferência pela conceituação em virtude das outras componentes, quase inexistentes.

Em 2001 a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) publicou o livro “Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio”, escrito por diversos autores e editado pelo professor Elon Lages Lima. O propósito do trabalho era justamente destacar pontos fortes e fracos das diversas coleções de livros didáticos utilizados nas escolas brasileiras. Esta avaliação revelou algumas abordagens louváveis, dignas de elogios. Por outro lado, deixa evidente uma série de defeitos, vícios, excessos e supressões de assuntos importantes, destacando temas de pouca relevância em virtude de temas que seriam muito mais interessantes. Destacado por Lima (2001), a análise mostrou uma evidente predileção dos livros didáticos brasileiros pela manipulação, tanto que o público em geral acredita ser essa a única componente da matemática. Tem-se aí um contraste com a conceituação precisa, mas inacessível aos estudantes de outrora.

Um dos tópicos abordados pelo livro em questão é a Geometria Analítica, objeto de estudo do presente trabalho. Uma relevante revelação consiste na total ausência do tema vetores nos livros didáticos brasileiros. Assim, essa disciplina não é tratada sob um ponto de vista vetorial e restam dúvidas dos motivos para este assunto simplesmente não

ser abordado no Ensino Médio.

Outro aspecto observado foi a demasiada fragmentação do estudo da Geometria Analítica, priorizando na maioria das vezes os aspectos algébricos, sem conectá-los à geometria, tirando todo o sentido do estudo desse conteúdo.

Podemos destacar, ainda, o contraste dos materiais didáticos atuais se comparados com aqueles do período sob forte influência da Matemática Moderna. Se por um lado, naquele momento da história os livros eram extremamente formalistas priorizando a conceituação, o momento atual revela uma forte tendência e preferência pela manipulação, negligenciando demonstrações e justificativas lógicas. Embora muito discutida na educação, as aplicações ainda não estão presentes no ensino, pois os livros didáticos são extremamente frágeis quanto a este aspecto. Como dito anteriormente, deve-se procurar o equilíbrio entre conceituação, manipulação e aplicação. O que notamos é que cada momento histórico opta por privilegiar uma das componentes.

Segundo Wagner (1999), a divisão dos temas do currículo de Matemática em fragmentos estanques é prática recorrente para a execução do trabalho, mas não conduz a um bom ensino. Os livros didáticos não estabelecem conexões e nem mesmo fazem referência às ligações dos temas matemáticos estudados com outras áreas de conhecimento, seja dentro da própria matemática ou em outros campos. Como exemplo, diz que o aluno é incapaz de perceber que o estudo de genética (em Biologia) tem íntima ligação com as lições de probabilidade ou que a função quadrática aparece quando se estuda o movimento uniformemente variado em física.

O mesmo ocorre com a Geometria Analítica, que não faz referência aos problemas de Geometria (Sintética), que os alunos conhecem desde do 9º ano do Ensino Fundamental. A impressão é que a Geometria Analítica serve apenas para resolver problemas desta própria área da matemática.

A qualidade do material didático usado pelas escolas brasileiras, revela-se de grande importância para o desenvolvimento e a qualidade da educação básica. Como explica Elon (2007), há um problema grave na formação do futuro professor que, em geral, não

teve uma boa formação na escola básica e assim não conhece bem a matemática que irá ensinar. Ao entrar no curso universitário, as aulas se concentram em Cálculo, Variáveis Complexas, Equações Diferenciais e outros assuntos de graduação, mas ao final o futuro professor recebe seu diploma sem ter o domínio do conteúdo básico que vai transmitir aos seus alunos. Como não teve uma boa formação, o professor, a fim de preparar suas aulas, recorre quase exclusivamente aos livros didáticos.

O mesmo autor destaca que tanto os livros-texto do Ensino Fundamental quanto os do Ensino Médio apresentam deficiências no que diz respeito à objetividade, às aplicações, à oferta de problemas atraentes e ao uso do raciocínio dedutivo. Porém, uma diferença é que os primeiros, de modo geral, não apresentam erros matemáticos. O mesmo não se pode dizer dos livros do Ensino Médio.

A maioria destes livros (do Ensino Médio) traz definições, raciocínios, métodos de resolução de problemas e respostas inteiramente inadequados e até desprovidos de sentido. Curiosamente, os livros didáticos que apresentam mais deficiências são justamente aqueles mais vendidos. Geralmente são livros simples, não exigem muito raciocínio, não apresentam problemas difíceis e trazem as resoluções completas dos exercícios propostos. Esta é possivelmente a razão de seu êxito comercial.

No Brasil, milhares de livros-textos são publicados anualmente, levando o mercado a uma grande competitividade e a um enorme lucro, mas também criando uma contradição com as regras usuais da economia que, teoricamente, levaria à busca de uma maior qualidade. O aperfeiçoamento deu-se apenas nos aspectos gráficos, conseqüentemente elevando o preço dos livros. Porém, a verdade é que a qualidade científica e didática não é muito diferente hoje de décadas passadas.

Capítulo 2

EXAME DE TEXTOS: ANÁLISE DE LIVROS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Lançado em 2001 pela Sociedade Brasileira de Matemática, o livro “Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, editado por Elon Lages Lima, verificou 12 coleções, num total de 36 volumes, a fim de identificar pontos positivos e negativos nos livros didáticos adotados pelas escolas brasileiras. Esta tarefa foi cumprida por: Augusto César Morgado, Edson Durão Júdice, Eduardo Wagner, Elon Lages Lima, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes e Paulo Cezar Pinto Carvalho.

Durante este capítulo faremos uma apresentação, em linhas gerais, do que foi obtido pela análise dos livros no que tange o conteúdo de Geometria Analítica.

A Geometria Analítica faz uma interconexão entre a Geometria e a Álgebra, desta forma permite tratar algebricamente várias questões geométricas e, de forma recíproca, de questões algébricas através do uso de Geometria. Isso é a essência da Geometria Analítica e que é completamente ignorada pelos autores de livros didáticos brasileiros que tratam essa

disciplina como um amontoado de fórmulas, muitas vezes desprovidas de sentido e ignoram completamente o aspecto geométrico. Não é adequado que um livro dedique cem páginas ao ensino de Geometria Analítica, alguns até mais, sem estabelecer conexão entre esses dois ramos da matemática.

Em praticamente todas as coleções verificou-se uma despreocupação quanto à conceituação. Os autores não se importam muito com demonstrações e justificativas lógicas de seus argumentos, apresentando fórmulas prontas e, muitas vezes, generalizando afirmações a partir de casos particulares. Praticamente todos os exercícios são de manipulação, não exigindo interpretações de seus resultados e tornando o processo mecânico. As aplicações raramente aparecem, dando uma impressão de que a Geometria Analítica tem um fim em si mesma.

A primeira consideração a se fazer é a total ausência de vetores nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio; nenhum dos volumes aborda esse tema. Muitas das dificuldades encontradas nos livros didáticos poderiam ser superadas se a Geometria Analítica tivesse um tratamento vetorial. Isso facilitaria, por exemplo, a dedução da fórmula da distância entre um ponto e uma reta, deixaria a resolução de inúmeros problemas e a própria disciplina mais simples e elegantes, além de fazer uma conexão com a Física, em que o aluno precisa de vetores. Veja um exemplo do livro "Exame de Textos", cuja resolução abordando vetores é bem mais simples e menos trabalhosa:

"ABCD é um paralelogramo e os vértices A, B e C são dados em coordenadas. Determine o vértice D."[5]

Se o aluno conhece vetores, dará a resposta imediatamente: $D = A + C - B$. Se não conhece, terá que construir as equações de uma reta paralela a AB passando por C e uma reta paralela a BC passando por A , e encontrar a interseção delas.

Durante a análise de um dos livros, feita por Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, aparece uma possível justificativa para a ausência de vetores nos livros didáticos

brasileiros.

“Não vamos insistir no óbvio: um dos defeitos deste livro e de todos os livros de matemática para o Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de matemática. Talvez a justificativa esteja no fato que os vetores não estejam presentes nos programas de muitos vestibulares (mas estão, por exemplo nos vestibulares do Rio de Janeiro). Mesmo assim, esta justificativa não se sustenta, uma vez que os vetores são uma ferramenta extremamente útil, simplificando cálculos e permitindo soluções simples e elegantes de diversos problemas.”

[5]

Por fim o livro “Exame de Textos” deixa a pergunta: Porque não falar de vetores?

Outra observação frequente durante a análise dos livros refere-se ao estabelecimento do plano cartesiano. Não há grandes preocupações com justificativas e uma adequada formulação dos eixos coordenados. Muitos livros falam de segmento orientado, mas nunca o definem ou o fazem de forma indecifrável, ou ainda mais grave, faz a definição de forma errada, como ocorre com um dos livros avaliados. Não se preocupam em fazer uma abordagem sobre coordenadas na reta antes expandir para o plano. Também apresentam o plano

como se ele fosse fixo. Com frequência se fala em correspondência biunívoca, mas nenhum volume mostra de que forma essa correspondência é feita.

Ao tratar de alinhamento de três pontos, os livros didáticos insistem no uso de um determinante 3×3 ; apenas um dos livros não aborda o tema sob este aspecto. O uso de determinantes não está errado e, embora seja um bom truque para memorizar, é uma forma inadequada de tratar o assunto, pois surge como mágica e tira o aspecto geométrico do estudo da Geometria Analítica. Além disso, dados os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, o alinhamento desses três pontos se baseia numa semelhança de triângulos retângulos, definindo a inclinação de um segmento não-vertical AB como o quociente $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, os pontos A , B e C são colineares se, e somente se, os segmentos AB e AC são verticais ou a inclinação de AB é igual à inclinação de AC .

Como dito antes, os livros didáticos apresentam o plano cartesiano como algo fixo e pronto. Desta forma não atuam para educar o aluno a pensar, pois as situações são apresentadas já prontas, como se o mundo fosse organizado segundo coordenadas e houvesse um ponto especial no mundo que seria a sua origem. Faltam exercícios em que o aluno é instigado a usar a Geometria Analítica para resolver problemas de geometria plana. Não há uma palavra sobre mudanças de coordenadas e, muitas vezes, isto simplifica problemas mais complexos. São apresentados apenas exercícios mecânicos e de manipulação. Não há problemas contextualizados que, de fato, possam estabelecer conexão com a realidade.

Um dos livros traz um exercício “contextualizado” onde diz que “duas estações de metrô se localizam a $40\sqrt{2}$ Km uma da outra”. Na prática não temos estações com essa distância, ou seja, não há o devido cuidado ao formular questões. Ao estudar equações paramétricas é natural que se estabeleça uma ligação com a cinemática na Física, da forma como está posto, o aluno não entende qual o sentido de se estudar tais equações. No estudo de regiões definidas por inequações falta apresentar problemas de programação linear, perdendo uma excelente oportunidade de mostrar uma bela aplicação da Geometria Analítica.

Falta, na maior parte dos livros, estabelecer uma ligação entre reta e função afim. Poderiam mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e que,

reciprocamente, toda reta não-vertical é gráfico de uma função afim. Essas demonstrações são diretas e não exigem muito esforço. Contribuiriam para a compreensão da conexão entre esses assuntos e familiarizaria o aluno com a necessidade de provar teoremas.

Os autores dos livros parecem ficar em dúvida se dão ou não importância ao estudo de simetrias. Este tema muitas vezes nem mesmo é comentado. Em outros livros ele aparece como se já fosse do conhecimento do aluno ou como um problema resolvido. Nunca é apresentada uma definição de simetria e, geralmente, estuda-se apenas simetria em relação aos eixos coordenados. Não aparecem exercícios, por exemplo, pedindo para determinar as coordenadas do ponto simétrico a um ponto dado em relação a uma reta qualquer também dada.

O estudo da reta é, na maioria das vezes, demasiadamente fragmentado, tratando de excessivos casos, dando muita ênfase a equações e não se preocupando com o significado geométrico dos elementos dessas equações. Aqui, novamente, aparece o infeliz determinante como forma de se obter a equação da reta, ao apresentar a equação da reta $ax + by + c = 0$. Aliás, o livro “Exame de Textos” diz que a forma mais adequada seria $ax + by = c$, não apenas por estética, mas porque assim a equação apresenta a linha de nível da função $f(x, y) = ax + by$. Em nenhum momento os volumes analisados chegam a citar que o segmento OP , onde $O = (0, 0)$ e $P = (a, b)$, é perpendicular à reta de equação $ax + by + c = 0$. Também não fazem um estudo sobre a posição relativa entre duas retas. Não dizem, por exemplo, que dadas as equações $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, as retas são perpendiculares se, e somente se, $aa' + bb' = 0$. Tudo isso seria facilmente entendido com um tratamento vetorial. Porém, da forma como está, o aluno não vê sentido em estudar esse tipo de equação, pois é incapaz de tirar conclusões a partir dela.

As equações paramétricas também não fazem sentido, pois, da forma que são colocadas, não servem para nada. Deste modo, vai reforçando no aluno a ideia de que a matemática é um amontoado de fórmulas prontas e sem sentido. Mesmo no estudo da equação do tipo $y = mx + n$, muitas vezes, fala-se de coeficiente angular e coeficiente linear, mas sem a preocupação de dar-lhes maiores sentidos.

Por não darem um tratamento vetorial à Geometria Analítica, os autores de livros didáticos encontram-se em uma encruzilhada quando se deparam com o problema de determinar a distância de um ponto a uma reta. Aqui, uns poucos, seguem o ardiloso caminho de demonstrar a fórmula, muitas vezes o fazem de forma confusa, cansativa e com enorme quantidade de contas. Outros apenas dizem que a dedução da fórmula é muito trabalhosa, por isso, não será feita e apresentam-na sem nenhuma justificativa. O terceiro grupo apresenta um caso particular, normalmente como um exercício resolvido, que apresenta ardilosamente com um amontoado de contas e daí generaliza a fórmula, passando a ideia de que a validade matemática de um argumento pode ser verificada para alguns casos e tomada como verdadeira.

Capítulo 3

VERIFICAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Neste capítulo, escolhemos três livros didáticos de editoras diferentes, lançados em 2012 e que foram analisados pelo livro “Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, nas suas versões publicadas em 2001, a fim de fazermos um comparativo. A intenção é verificar se as sugestões apresentadas foram incorporadas ou mesmo se houve mudanças significativas. Os livros que foram escolhidos são:

- Versão analisada em 2001: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilton José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro e Antonio dos Santos Machado - **Matemática**. Editora Saraiva. (análise feita por Eduardo Wagner e Augusto César Morgado).

- Versão analisada em 2012: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida - **Matemática: Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva.

- Versão analisada em 2001: Luiz Roberto Dante - **Matemática: Contexto e Aplicações**. Editora Ática. (análise feita por Elon Lages Lima e Eduardo Wagner).

- Versão analisada em 2012: Luiz Roberto Dante - **Matemática: Contexto**

e Aplicações. Editora Ática.

- Versão analisada em 2001: Manoel Rodrigues Paiva - **Coleção Matemática**. Editora Moderna. (A análise feita por Paulo Cezar Pinto Carvalho e João Bosco Pitombeira de Carvalho).

- Versão analisada em 2012: Manoel Rodrigues Paiva - **Matemática**. Editora Moderna.

3.1 Análise do Livro “Matemática: Ciência e Aplicações” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida.

Na apresentação da versão de 2012, os autores dizem que:

“O livro procura, sempre que possível, apresentar os assuntos de forma contextualizada e simples.”[4]

Apresentarão as justificativas lógicas das propriedades que forem aparecendo, omitindo apenas aquelas que considerarem exageradas.

A novidade fica por conta de desafios de raciocínio lógico, apresentado ao final de cada tema, *“sem exigir conhecimentos matemáticos muito específicos e, propositalmente, não tem relação direta com o assunto abordado no capítulo.”*[4]

Parece-nos estranho que algo não relacionado ao tema esteja propositalmente posto ali. Encerram dizendo que estão cientes de que, apesar do esforço depositado no aperfeiçoamento, sempre existirão melhorias a fazer.

O livro, no geral é bem organizado, tem uma boa apresentação e não revela problemas de impressão, tanto no texto como nas figuras. Inicia com uma nota histórica intitulada *“Introdução à Geometria Analítica”*, citando, ao final, as devidas fontes. Como

era de se esperar, a nova versão, como a de 2001, também não trata de vetores, o que naturalmente dificulta a abordagem. Na segunda linha do livro aparecem as palavras “*eixos orientados*”, mas em nenhum momento é apresentado ao aluno o significado de tal expressão.

A análise do livro feita em 2001 foi elogiada pelos examinadores por não dar ênfase a coisas não importantes citando como exemplo, que a determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo é apenas um exercício resolvido e não parte integrante do texto. O curioso é que a versão de 2012 fez justamente o contrário, colocando o problema como parte do texto. Além disso, afirma sob a justificativa de “*vamos lembrar da geometria plana*”, que o baricentro divide a mediana na proporção de 2:1 e pede para o aluno observar o desenho, que nada prova, dando a entender que uma simples figura é suficiente para provar uma propriedade. A figura deve ser apenas um auxílio na demonstração.

As duas versões usam determinantes para estudar o alinhamento de três pontos e para determinar a equação da reta. O livro “*Exames de Textos*” tece duras críticas à insistência dos autores brasileiros em adotar esta abordagem. Isso pode até ser de fácil memorização, mas, ao mesmo tempo, tira totalmente os aspectos geométricos do estudo da Geometria Analítica. A abordagem baseada em semelhança de triângulos, comentada no Capítulo 2 desta dissertação, é muito mais elucidativa, educada e elegante.

Como na versão de 2001, a de 2012 também prioriza fortemente os exercícios de manipulação. São raríssimas as contextualizações e os problemas de aplicações, o que é uma total contradição, pois isso é parte integrante do título do livro. Como foi destacado pelos examinadores, “*tudo já aparece dado em coordenadas. Infelizmente não há nenhum problema em que o aluno deva estabelecer o sistema de coordenadas para resolvê-lo.*”[5]

No estudo da reta, o livro tem o cuidado de mostrar que as equações do primeiro grau representam retas e que toda reta pode ser representada por uma equação do primeiro grau. O texto é enxuto, equações segmentárias e paramétricas são apresentadas em um tópico sucinto. Este é um dos livros que faz uso de determinantes, sem maiores justificativas, para chegar à equação do tipo $ax + by + c = 0$, segue com uma série de exercícios de manipulação e não discute as propriedades geométricas de tal equação.

No tópico seguinte, estuda-se inclinação, definindo-se bem o coeficiente angular de uma reta e, em seguida, apresenta a equação do tipo $y = mx + n$. De forma natural, aborda o paralelismo e o perpendicularismo que é estabelecido mostrando que $m_r.m_s = -1$ é condição necessária e suficiente para que as retas r e s sejam perpendiculares. Como em 2001, esta parte é bastante elogiável.

Os autores não percebem a utilidade das equações paramétricas, não menciona que o parâmetro pode representar o tempo. Todos os exercícios são artificiais. Não há aplicações e as equações paramétricas já são dadas. Destacamos abaixo um típico exercício do livro:

“Escreva a forma geral, a reduzida e a segmentária da reta dada por $x = 2t - 1$ e $y = 2 - 3t$.”[4]

Ao contrário de outros livros, este demonstra, com grande esforço, mas cuidadosamente, a fórmula da distância entre um ponto A e uma reta $ax + by + c = 0$ dada. Se tivesse mostrado que o segmento OP , onde $O = (0, 0)$ e $P = (a, b)$ é perpendicular à reta $ax + by + c = 0$, a demonstração da fórmula poderia ser um pouco mais simples.

Nossa comparação das versões de 2001 e 2012 mostrou que o livro sofreu poucas mudanças, portanto, apesar dos autores dizerem que ele está em constante aperfeiçoamento, o que se nota é que o livro segue com os mesmos vícios e que o desenvolvimento ficou restrito à parte gráfica.

3.2 Análise do Livro “Matemática: Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante.

A versão de 2012 do livro abre sua apresentação com as seguintes citações:

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles.[2]

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky.[2]

O autor promete que essas ideias irão nortear os conteúdos do livro, para dar ao aluno uma maior compreensão da matemática, atribuindo-lhe significado e mostrando como aplicá-la aos problemas do mundo real. Diz que os conceitos são explorados de maneira intuitiva e compreensível, que evita receitas prontas e o formalismo excessivo, mas sem perder o rigor.

Outro ponto que chama a atenção é a afirmação de que a coleção procura englobar os assuntos costumeiramente estudados no Ensino Médio e, além disso, espera auxiliar a preparação dos alunos para os processos seletivos de ingresso nos cursos de Educação Superior. Aqui está uma possível explicação para o não tratamento vetorial da Geometria Analítica no Ensino Médio, já que são raros os vestibulares que exploram esse conteúdo.

Por outro lado, fica evidente que os autores brasileiros estão desprovidos de uma visão mais global da educação, pois se perde uma grande oportunidade de ligar o estudo de vetores e de equações paramétricas com os conteúdos que se estuda em Física, promovendo uma maior interdisciplinaridade.

Na versão de 2001, o Volume 3 inicia, em seu primeiro Capítulo, o estudo de Geometria Analítica. Já na versão de 2012, este estudo começa a partir do Capítulo 3. A princípio é apresentada uma nota histórica, bem escrita, ressaltando que a Geometria Analítica estabelece uma correspondência entre a Geometria e a Álgebra. Pena que o livro

parece perder essa noção em certos momentos no decorrer de seu desenvolvimento. Faltou, ainda, a indicação de fontes e sugestão de bibliografias sobre o assunto.

Em 2001, os examinadores enfatizaram que o livro dizia que há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais, mas não mostrava como estabelecer essa bijeção e afirmava que ela era única, o que não é verdade. Cada sistema de eixos ortogonais do plano determina uma correspondência. É isso que dá a liberdade para escolher os eixos de acordo com a conveniência.

Na versão de 2012, o livro continua a não apresentar como estabelecer essa correspondência, mas traz um comentário dizendo que a correspondência não é única, dependendo da escolha dos eixos. Nas duas versões, o autor poderia ter dedicado algumas poucas linhas para comentar de coordenadas num eixo e, em seguida, estabelecer as coordenadas no plano.

Os exercícios são sempre apresentados já com o plano dado, não dando ao aluno a possibilidade de refletir sobre qual seria a melhor escolha para os eixos. Para ser justo, há um tópico, intitulado “*Aplicações à Geometria Plana*” que apresenta um exemplo desse tipo. Em seguida apresenta quatro exercícios que, curiosamente, em apenas um, temos a necessidade de escolher os eixos. Outro dá a equação de uma reta e pede ao aluno para determinar uma equação que represente um feixe de retas perpendicular a a ela, mas em nenhum outro lugar do livro há menção sobre feixe de retas.

Os autores limitam-se a dividir um segmento de reta ao meio, determinando as coordenadas do ponto médio. Seria muito mais educativo determinar as coordenadas de um ponto que divide o segmento em uma razão dada. Em seguida, apresenta um exemplo resolvido, onde dá três pontos e calcula o comprimento das medianas. Ao fazer esse exemplo, destaca em um quadro, intitulado “*Para refletir*” que, “*todo triângulo possui três medianas que se cruzam num ponto chamado baricentro*”[2]. Isso soa um tanto artificial, passando a ideia de que isso deve ser aceito sem nenhum questionamento. Ao estudar retas, o livro poderia ter proposto um exercício como abaixo:

“Dados os pontos $A = (2, -6)$, $B = (-4, 2)$ e $C = (0, 4)$, mostre que as três medianas se intersectam em um único ponto.”[2]

Um exercício como o indicado acima, levaria muito mais à reflexão do que a frase destacada pelo autor. É claro que o exercício acima poderia ser generalizado, bastando para isso, tomar pontos arbitrários.

Para o estudo das condições para que três pontos do plano estejam alinhados, como quase todos os livros, este também usa o determinante sem maiores justificativas. Abaixo citamos o comentário dos examinadores da versão de 2001 sobre o assunto.

Para obter a condição de alinhamento de três pontos, o livro começa pondo o problema em termos da igualdade $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, mas abandona bruscamente essa ideia e saca um determinante, cuja origem não explica. E conclui com a condição expressa sob a forma de um determinante 3×3 igualando a zero. Inexplicavelmente, essa maneira complicada, obscura e injustificada de caracterizar o alinhamento de 3 pontos é a favorita dos autores brasileiros. O significado geométrico daquele determinante é que seu valor absoluto é igual a 6 vezes o volume da pirâmide cujo vértice é a origem e cuja base é o triângulo ABC , onde $A = (x_1, y_1, 1)$, $B = (x_2, y_2, 1)$ e $C = (x_3, y_3, 1)$. Quando A , B e C estão alinhados a base ABC se degenera num segmento e o volume da “pirâmide” fica igual a zero. Convenhamos que é um modo um tanto extravagante de tratar a questão.

[5]

A versão de 2012 do livro também não comenta sobre essa interpretação geométrica; nem deveria. Esse assunto é uma simples questão de semelhança de triângulos.

Neste ponto temos mais um exemplo de que os autores de livros didáticos, muitas vezes, não fazem a devida conexão entre a Álgebra e a Geometria. Como em boa parte da obra o livro prima pelas técnicas para o vestibular.

No estudo da reta, o livro procura ser sucinto e acaba por jogar um amontoado de regras e fórmulas que o aluno deve aceitar sem questionamentos. Em 2001, ao apresentar a equação $ax + by + c = 0$ dizia que ela “*não identifica nenhum elemento [da reta] em especial*”[5]. Obviamente isso não é verdade. Na versão de 2012, o autor muda e afirma que essa equação fornece a declividade $-\frac{b}{a}$ e que a reta corta os eixos nos pontos $(-\frac{c}{a}, 0)$ e $(0, -\frac{c}{b})$, mas é apenas um comentário sem muito critério, o que passa a ideia de não ser tão importante. Poderia ter dito ainda que o segmento OP , onde $O = (0, 0)$ e $P = (a, b)$ é perpendicular à reta.

No livro, são apresentas outros tipos de equações de reta, mas não se dá muita importância às propriedades geométricas, priorizando sempre a manipulação algébrica. Em 2001, as equações paramétricas eram apresentadas como um exemplo particular e nunca foi definida. Nessa nova versão, foi suprimida. Aparece apenas num exercício que dá as equações paramétricas de uma reta e pede para escrever a sua equação geral.

Ao estudar posição relativa de duas retas, o livro dá prioridade a equações do tipo $y = mx + n$. Tudo que é feito ali está correto, mas a impressão que fica é que sempre se deve transformar a equação para a forma reduzida e, somente depois disso, estudar paralelismo e perpendicularismo. Para não ser injusto, o livro faz a seguinte observação:

Observação: Uma maneira prática de verificar a perpendicularidade de duas retas r e s , dadas por suas equações gerais, tal que
 $r : ax + by + c = 0$ e
 $s : a'x + b'y + c' = 0$, é verificar se $aa' + bb' = 0$. Se isso ocorrer, elas são perpendiculares.

[2]

Entretanto, novamente o aluno deve aceitar que essa afirmação é verdadeira sem maiores justificativas. Novamente o foco fica na Álgebra e não na relação que ela tem com a Geometria. Se o livro tivesse introduzido vetores antes do estudo da reta, seria muito mais prático e claro o estudo de paralelismo e perpendicularismo.

No estudo da distância de um ponto a uma reta, o livro traz um exemplo, e diz que “*com o mesmo procedimento*”[2] se pode chegar à fórmula geral, que foi apresentada em destaque. Depois disso resolve outro exemplo usando-a. Fica parecendo que para mostrar a validade de uma fórmula matemática é só fazer alguns casos particulares e isso basta. Essa mesma crítica está presente na análise da versão de 2001.

Ao final da análise da versão de 2001, os examinadores apresentaram a seguinte conclusão:

Em resumo, este capítulo
ressente-se das seguintes falhas:
Não há aplicações da Geometria
Analítica para resolver problemas
de Geometria Plana.
Particularmente, o aluno não tem
oportunidade de escolher o sistema de
coordenadas que melhor lhe
convenha. Não há aplicação a
outras matérias, como a
Cinemática. Não há problemas
contextuais. Embora vá usar
vetores no capítulo sobre números
complexos, eles não são estudados
aqui, como deveriam, a fim de
ajudar a esclarecer muitas
situações. Não há referências a
feixes de retas nem a regiões
definidas por desigualdades
lineares. A forma
 $r : ax + by + c = 0$ e a forma
paramétrica da equação da reta não
são adequadamente estudadas.

[5]

Após a análise da versão de 2012 pudemos concluir que, embora em alguns pontos o autor tenha se esforçado para abordar as questões, muito ainda há que melhorar. As recomendações feitas no livro “Exame de Textos” continuam validadas para essa mais recente edição.

3.3 Análise do Livro “Matemática” de Manoel Rodrigues Paiva.

Ao contrário dos seus congêneres, este livro não inicia com uma apresentação e nem faz uma introdução histórica. Afirmar apenas que “*Transitando entre Álgebra e Geometria Euclidiana, a Geometria Analítica possibilita a representação de figuras geométricas por meio de pares ordenados, equações e inequações*”[10]. Faltou dizer que o caminho inverso também é importante. No geral o livro é confuso devido a uma falta de hierarquização dos conteúdos, fato criticado na análise feita pelos examinadores em 2001.

O livro não apresenta o plano cartesiano, também não diz como representar um ponto nele. Tudo isso é conhecimento pressuposto. Claro que o aluno já teve contato com coordenadas, mas esse seria o momento oportuno para um tratamento mais criterioso. Além disso, não seria trabalhoso, mas de grande valia, uma introdução desse assunto antes de prosseguir. O autor começa o capítulo falando da distância de dois pontos.

Como todos os livros analisados, e este não é diferente, a Geometria Analítica é apresentada sempre com o plano cartesiano fixo. O aluno nunca tem a possibilidade de decidir qual é a melhor escolha para se fixar os eixos. Fica parecendo que problemas reais estão sempre sobre um sistema de eixos já definidos. Abaixo citamos um ótimo problema desse tipo, apresentado originalmente, como sugestão, na análise da versão de 2001.

(...) demonstrar que as alturas de um triângulo ABC se encontram em um ponto. Um sistema conveniente para este problema é, por exemplo, aquele em que o eixo dos x coincide com o lado BC e o eixo dos y coincide com a altura relativa a A . Neste sistema, os vértices do triângulo têm coordenadas $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$ e $C = (c, 0)$ e é fácil encontrar as equações das alturas e obter seus pontos de interseção (...)

[5]

A versão de 2001 trata de alinhamento de três pontos usando determinantes. Já na edição de 2012, o autor introduz o conceito de inclinação de segmento de reta. Depois define que os pontos A , B e C são colineares se, e somente se, os segmentos AB e BC têm a mesma inclinação. Essa abordagem é bem mais intuitiva e educada. Porém, a dificuldade dos autores brasileiros em abandonar o determinante levou à criação de um tópico intitulado “*Aplicação de Determinantes na Geometria Analítica*”[10], onde apresenta a velha abordagem do problema.

O livro limita-se a dividir um segmento dado em duas partes iguais, ensinando a calcular as coordenadas do ponto médio. O mais indicado seria abordar a situação com o problema de determinar o ponto que divide o segmento numa razão dada. O ponto médio seria consequência. O livro apresenta o seguinte exercício: “*Obter o simétrico do ponto $P = (1, 3)$ em relação ao ponto $T = (4, 6)$* ”[10], a resolução é bem simples e direta, mas em nenhum momento o livro define o que é um ponto simétrico.

No estudo da reta o livro apresenta a equação $r : ax + by + c = 0$, mas não faz nenhum estudo de suas propriedades geométricas, nem diz o significado de seus coeficientes.

Em seguida, mostra como achar o ponto de interseção de duas retas resolvendo o sistema representado por suas equações. Poderia ter feito o contrário, mostrando que a interseção de duas retas quaisquer é a solução do sistema linear de suas equações.

Na sequência, apresenta a equação reduzida da reta ($y = mx + n$) e aqui faz o estudo de paralelismo e perpendicularismo. Dá a impressão de que esse tipo de equação é a única que possibilita tal estudo e que sempre temos que transformar as equações em sua forma reduzida. O aluno nunca é questionado a fazer tal estudo quando as equações são do tipo $r : ax + by + c = 0$.

Dos livros analisados esse é, sem dúvida, o que melhor aborda a introdução de equações paramétricas, motivadas por problemas descrevendo a trajetória de uma partícula. Segue com boas escolhas de exercícios.

Este livro também é um exemplo de que os autores não se preocupam muito com uma correta conceituação da matemática. Ao estudar a distância de um ponto a uma reta, resolve um caso particular e, de forma artificial, diz que “*Esse procedimento pode ser generalizado pelo seguinte teorema: (...)*”[10], apresentando a fórmula.

A maioria dos exercícios presentes no livro é de manipulação, sem exigir que o aluno tome decisões ou faça interpretações de seus resultados. Como dito antes, faltam problemas de Geometria Plana para serem resolvidos usando Geometria Analítica. Um ponto positivo desta obra é que ela apresenta, mesmo que de forma breve, uma introdução ao estudo de Programação Linear, onde o aluno, talvez pela primeira vez, possa perceber a utilidade da Geometria Analítica.

O livro melhorou em alguns pontos. A última versão também está mais concisa e menos fragmentada. Como em 2001, os vetores são completamente ignorados e faltou tratar dos estudos de ângulos entre duas retas.

Como demonstrado neste Capítulo, os três livros analisados necessitam de muitas melhorias. Alguns problemas são flagrantes, outros sutis. As melhoras não foram significativas. De modo geral, os livros didáticos pouco evoluíram nesses últimos 11 anos.

Capítulo 4

A PROPOSTA DE MATERIAL

Diante do que foi exposto nos três primeiros capítulos, em que pudemos identificar, no que tange à Geometria Analítica, um pouco sobre os livros didáticos utilizados no Ensino Médio. Acreditamos ser conveniente a elaboração de um material que possibilite enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. Nossa intenção é que tal material possa ser usado em sala de aula, tanto por alunos como por professores, no auxílio do estudo da Geometria Analítica.

Para elaborar o material, partimos da ideia de fazer uma abordagem da Geometria Analítica usando vetores. Como demonstrado no livro “Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio” e em nossa análise de livros didáticos recentes, publicados em 2012, os autores tomam outro caminho, negligenciando essa poderosa ferramenta.

Do ponto de vista matemático, vetores são de simples introdução e, como dito, é uma ferramenta poderosa, não só no estudo da Geometria Analítica, mas também em outros conteúdos. Além de aplicações dentro da própria matemática, vetores já são estudados na disciplina de Física no Ensino Médio, desta forma possibilitando uma maior interdisciplinaridade entre os conteúdos estudados.

Abaixo detalhamos, como exemplo, as ementas das disciplinas de Física, que

estuda vetores, e, Matemática, onde está o conteúdo de Geometria Analítica. As ementas em questão foram retiradas do Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo.

Física

- Noção vetorial.
- Leis de Newton e suas aplicações: força peso; força normal; força de tração; força elástica; força de atrito.
- Aplicações das Leis de Newton no movimento circular.
- Introdução à gravitação universal: Sistema Geocêntrico; Sistema Heliocêntrico; Leis de Kepler; Lei da Gravitação Universal; Buraco Negro; Fenômeno das marés; Movimento dos astros, como planetas, estrelas, cometas e outros.

Matemática

Geometria, grandezas e medidas:

- Simetria: translação, rotação e reflexão.
- Os eixos cartesianos: a representação de pontos por meio de coordenadas.
- Introdução à geometria analítica: pontos, distâncias entre pontos, ponto médio, a reta como lugar geométrico.

Em nossa proposta, procuramos buscar um equilíbrio entre conceituação, manipulação e aplicação. Tentamos fazer uma abordagem simples, porém sem perder o caráter formal que a matemática exige.

4.1 Objetivos

Primeiramente, buscamos compreender, por meio da análise de livros didáticos, a abordagem dada à Geometria Analítica no Ensino Médio, identificando eventuais

falhas e pontos positivos.

Partindo dessa premissa, no sentido de colaborar com o ensino da matemática, estabelecemos como principal objetivo deste trabalho a elaboração de uma proposta de texto/atividades de Geometria Analítica com a inclusão de vetores, a conexão de vetores com outras áreas que não necessariamente a matemática e, por fim, a resolução de problemas, sendo este material produzido para utilização direta em sala de aula.

O trabalho tem o objetivo de abordar os seguintes tópicos:

1 - Coordenadas

- 1.1 - Coordenadas na reta
- 1.2 - Coordenadas no Plano
- 1.3 - Distância entre dois Pontos
- 1.4 - Exercícios

2 - Vetores no Plano

- 2.1 - Segmentos equipolentes
- 2.2 - Vetor no plano
- 2.3 - Operações com vetores
- 2.4 - Produto interno de dois vetores
- 2.5 - Projeção ortogonal de um vetor
- 2.6 - Área do paralelogramo e do triângulo
- 2.7 - Exercícios

3 - Estudo da reta

- 3.1 - Equações paramétricas
- 3.2 - Equação cartesiana ou geral da reta
- 3.3 - Equação reduzida da reta
- 3.4 - Exercícios

4 - Um pouco de Geometria Analítica espacial

- 4.1 - Coordenadas no espaço
- 4.2 - Vetores no espaço
- 4.3 - Produto interno

4.4 - Retas no espaço

4.5 - Exercícios

4.2 Público alvo e pré-requisitos

Para a elaboração de nosso material, tomamos como base o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo, onde a conteúdo de Geometria Analítica figura na ementa do 1º ano do Ensino Médio. Desta forma, procuramos desenvolver nosso texto para que possa, sem nenhum esforço adicional, ser aplicado para esta série. Cientes de que em muitas escolas a Geometria Analítica é tratada no 3º ano, destacamos que o material poderá ter igual proveito se usado neste momento.

O acreditamos que o único pré-requisito necessário para uma melhor compreensão de nosso material é que o aluno tenha bom domínio dos conteúdos tradicionalmente ensinados no Ensino Fundamental das Escolas Brasileiras. Ter bom domínio no manuseio de expressões algébricas e conhecer sobre Geometria (sintética) será de grande valia para o uso do texto.

4.3 Recomendações metodológicas e dificuldades previstas

Na elaboração de nosso texto, dividimos o conteúdo abordado em três partes que, por sua vez, são subdivididas em tópicos. Cada tópico traz uma parte de conceituação e tentaremos ser claros em nossas definições. Procuramos enriquecer o texto com a resolução de exemplos que buscam ilustrar e mostrar a aplicação daquele conteúdo. Ao final de cada parte encontra-se uma lista de exercícios, em que o aluno pode fixar o conteúdo e exercitar seus conhecimentos.

Acreditamos não haver grandes dificuldades na aplicação do material. O que

em primeiro momento poderia acontecer é certa resistência dos professores por se tratar de um tema relativamente novo, raramente explorado no Ensino Médio. Entretanto, notando que a introdução de vetores não é de grande dificuldade, perceberão que essa é uma ótima oportunidade para enriquecer os estudos de Geometria Analítica.

Capítulo 5

PROPOSTA DE ATIVIDADE

5.1 COORDENADAS

5.1.1 Coordenadas na reta

A reta diz-se orientada quando nela se estabelece um sentido de percurso considerado positivo e representado por uma seta (Fig. 5.1). O sentido oposto é negativo. Uma reta orientada na qual se fixou um ponto O , chamado *origem*, é denominado eixo. Uma vez fixada uma unidade de comprimento, um eixo E pode ser posto, de forma natural, em correspondência biunívoca com o conjunto \mathbb{R} dos números reais. A saber:

- À origem O do eixo E fazemos corresponder o número zero.
- A cada ponto P de E à direita de O corresponde o número real positivo, chamado distância $d(O, P)$ de P à origem O .
- A cada ponto P de E à esquerda de O corresponde o número real negativo $-d(O, P)$.

Desta forma, ao ponto P em E corresponde o número real p tal que $p = d(O, P)$ se P está à direita de O e $p = -d(O, P)$ se P está à esquerda de O .

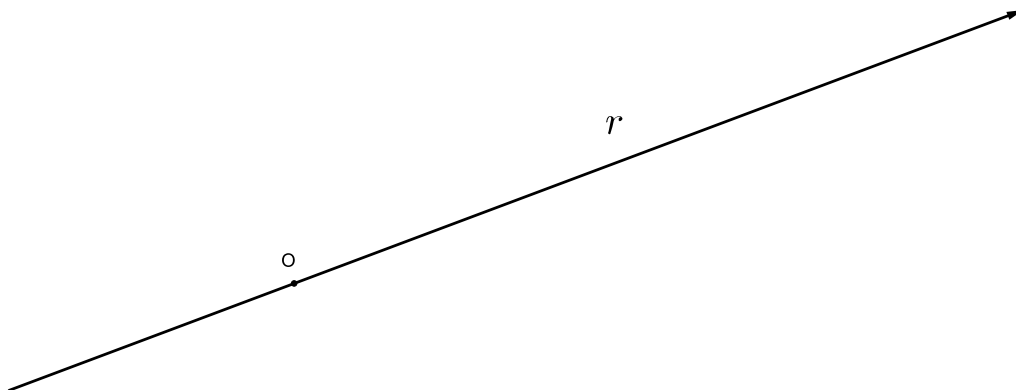


Figura 5.1: Reta orientada

Se ao ponto X do eixo E corresponde o número x , dizemos que x é a coordenada do ponto X .

A cada par de pontos X e Y sobre o eixo E , se as coordenadas são x e y respectivamente, então a distância do ponto X ao ponto Y é $d(X, Y) = |x - y| = |y - x|$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(X, Y) \geq 0$
2. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$
3. $d(X, Y) = d(Y, X)$

5.1.2 Coordenadas no Plano

Dado um plano π , um *sistema de coordenadas* (cartesianas) em π , consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY , contidos nesse plano, com mesma origem e

com unidades de medidas de comprimentos iguais.

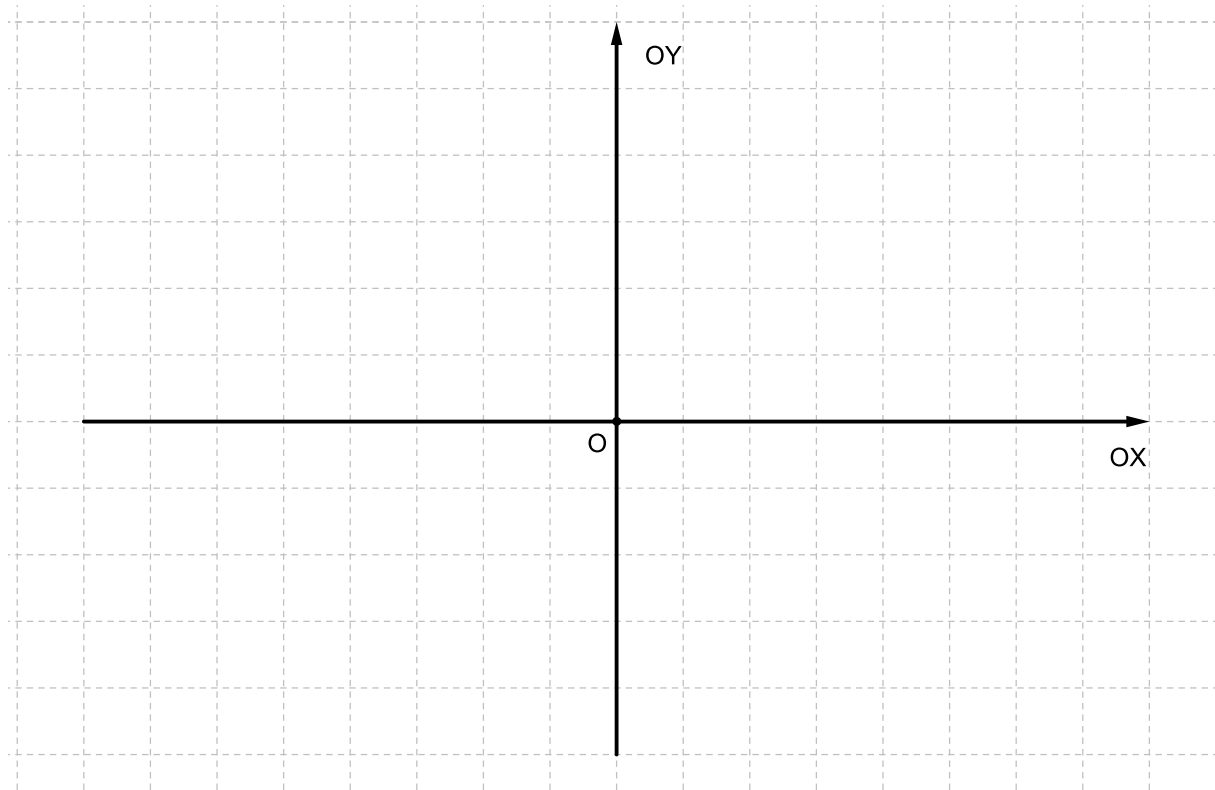


Figura 5.2: Sistema de coordenadas (cartesiana)

OX Chama-se eixo das abscissas.

OY Chama-se eixo das ordenadas.

A notação OXY indica o sistema de eixos perpendiculares.

Uma vez escolhido o sistema de eixos perpendiculares é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais $\mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ da seguinte forma:

Ao ponto P do plano fazemos corresponder o par ordenado (a, b) , onde a é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo OX por P e b é a ordenada do pé da perpendicular

ao eixo OY por P .

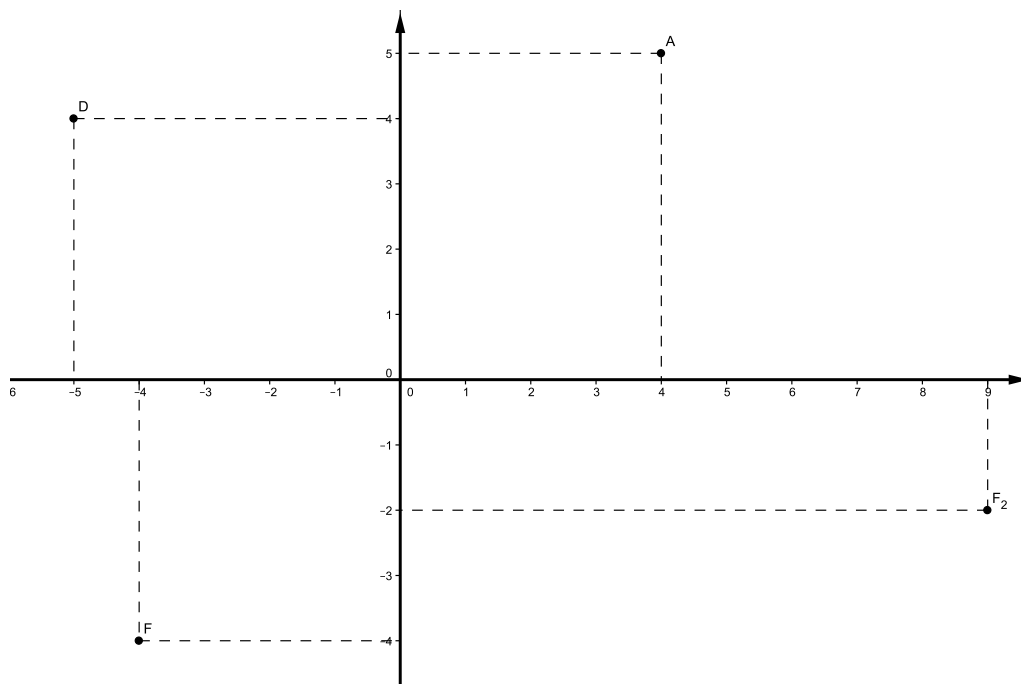


Figura 5.3: Pontos no plano

Na figura representada (Fig. 5.3) o ponto A tem abscissa 4 e ordenada 5, isto é, $A = (4, 5)$. Da mesma forma $D = (-5, 3)$, $E = (-3, -4)$ e $F = (9, -2)$.

Os dois eixos OX e OY dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes (Fig. A.4).

5.1.3 Distância entre dois pontos

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos distintos. Como calcular a distância $d(A, B)$ do ponto A ao ponto B ?

Como os pontos são distintos, se forem iguais a distância será zero, vamos considerar três possibilidades:

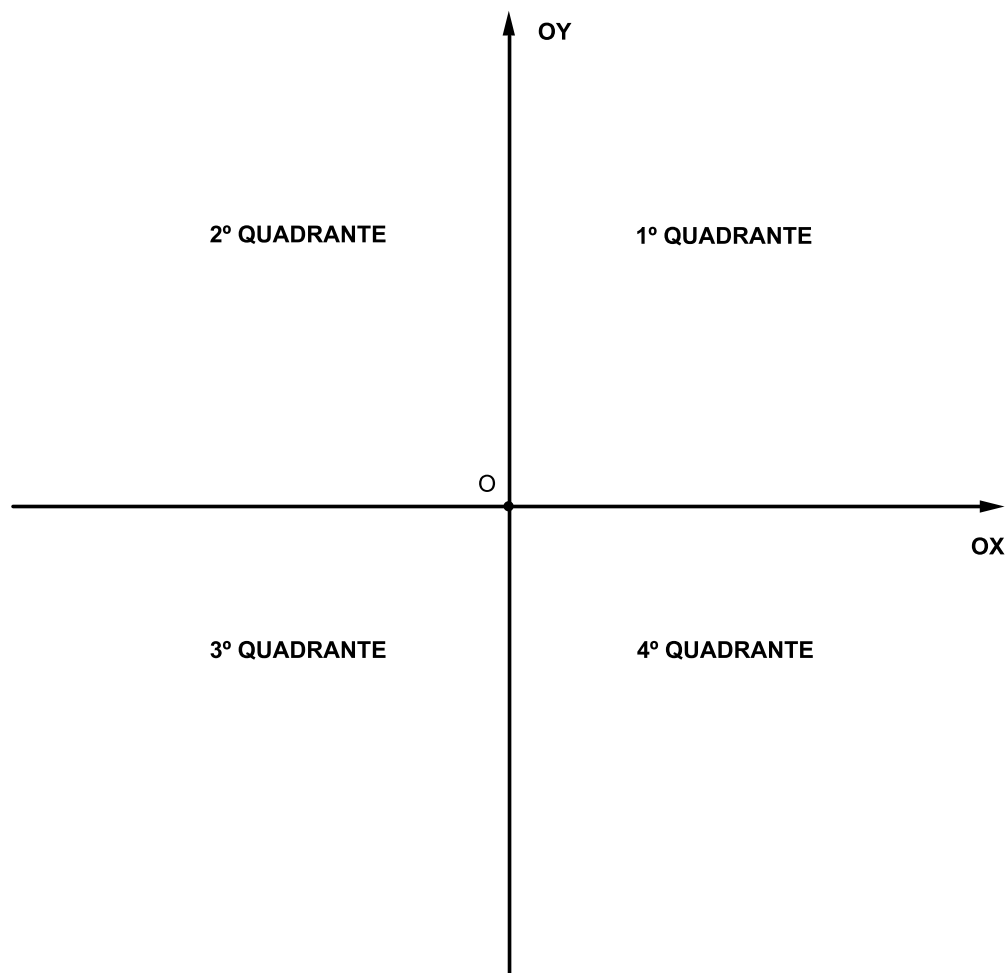


Figura 5.4: Quadrantes

1º) Se $x_A = x_B$ e $y_A \neq y_B$, então a $d(A, B) = |y_A - y_B|$.

2º) Se $x_A \neq x_B$ e $y_A = y_B$, então a $d(A, B) = |x_A - x_B|$.

3º) Se $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, neste caso $d(A, B)$, é a medida da hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC de catetos AC e BC (Fig. 5.5). Note que $C = (x_B, y_A)$, $d(A, C) = |x_A - x_B|$ e $d(B, C) = |y_A - y_B|$. Do teorema de Pitágoras obtemos:

$$d(A, B) = \sqrt{(d(A, C))^2 + (d(B, C))^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

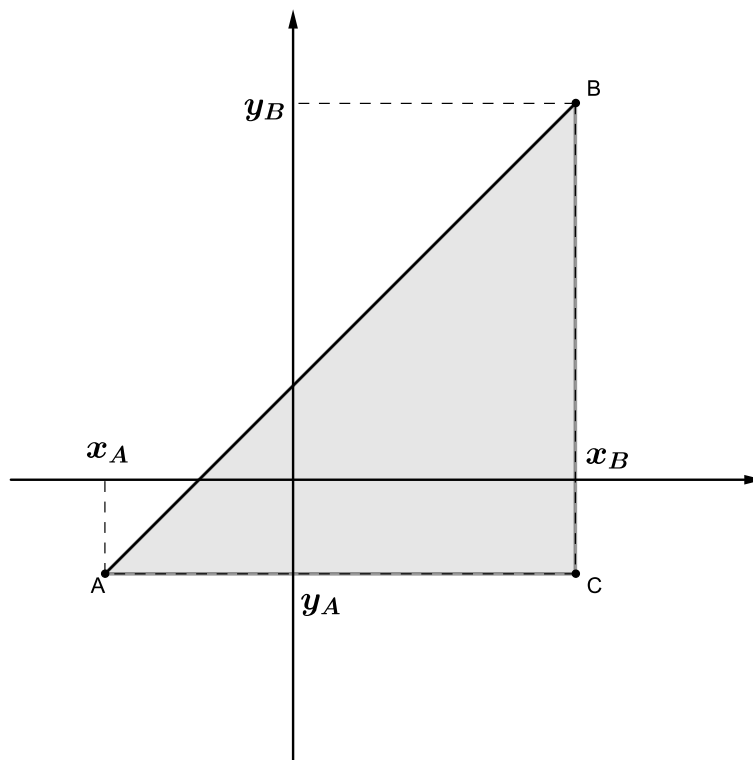


Figura 5.5: Distância entre pontos no plano

Exemplo 1 - Calcule a distância entre $P = (-1, 4)$ e $Q = (3, 2)$.

$$\text{R. } d(P, Q) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

Da Geometria Euclidiana sabemos que, dado um ponto C (centro), pertencente a um plano π , e uma distância r (raio) não nula, chama-se circunferência de centro C e raio r o conjunto dos pontos de π que estão à distância r do ponto C .

Dada a circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio r , um ponto $P = (x, y)$ pertence a essa circunferência se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r . Isto é, $d(P, C) = r$, daí $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$. Portanto, a equação da circunferência de centro

$C = (a, b)$ e raio r é dada por,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Exemplo 2 - Determine o centro da circunferência que passa pelo ponto $A = (1, 2)$ e tangencia os eixos coordenados.

R. Seja C o centro e r o raio da circunferência. Como a circunferência tangencia os eixos coordenados, temos que $C = (r, r)$. Pois a distância do ponto C ao eixo X é igual à distância de C ao eixo Y .

Como $d(A, C) = r$, segue que $(r - 1)^2 + (r - 2)^2 = r^2$, daí $r^2 - 6r + 5 = 0$, logo $r = 1$ ou $r = 5$.

Portanto há duas circunferências cujos centros são $(1, 1)$ e $(5, 5)$, respectivamente (Fig. 6.6).

5.1.4 Exercícios

1) Se, na reta real, os pontos A , B e C têm coordenadas -2 , $\frac{2}{7}$ e $1, 5$, respectivamente, calcule o comprimento dos segmentos.

a) AB

b) AC

c) BC

d) CB

2) Represente no plano cartesiano, os pontos:

a) $A = (1, 2)$

b) $B = (-3, 3)$

c) $C = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$

d) $(-3, \frac{2}{5})$

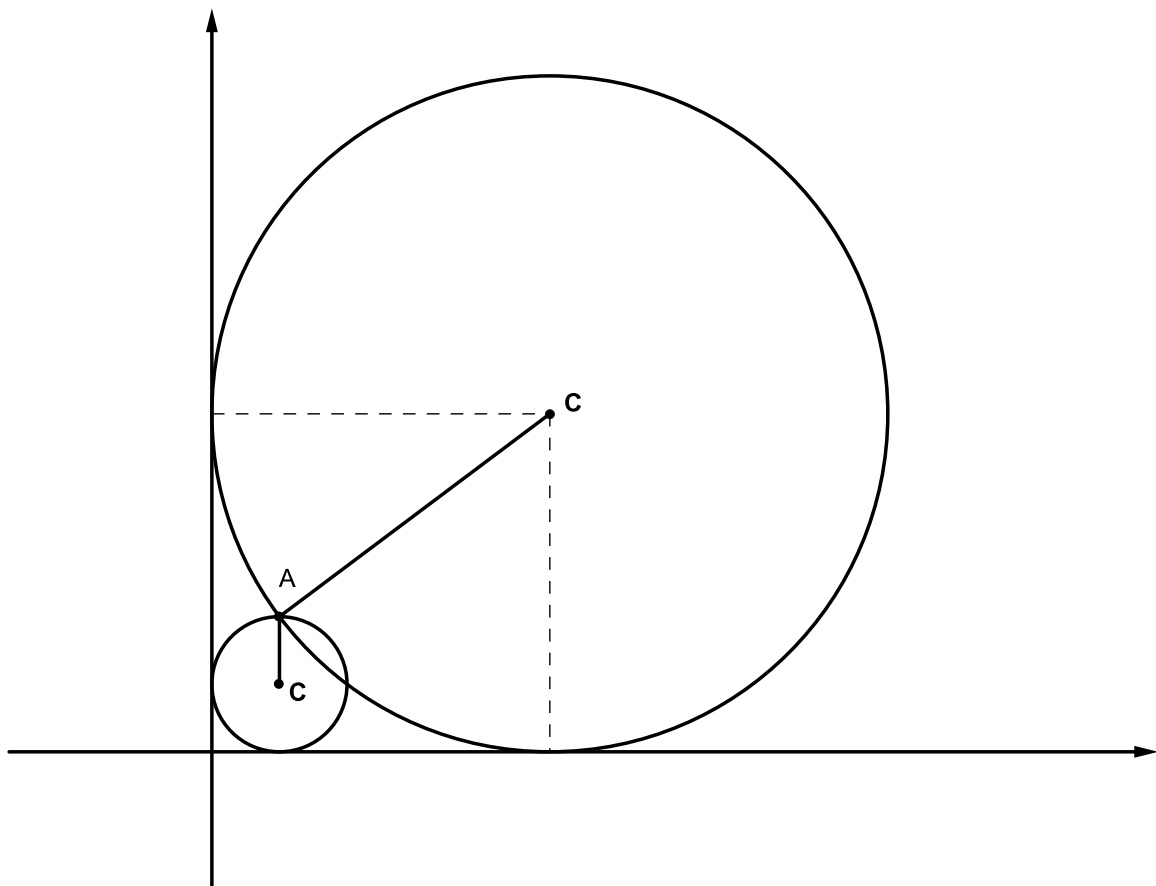


Figura 5.6: Exemplo

e) $E = (0, 4)$

f) $F = (-3, 0)$

3) Diga a qual quadrante cada um dos pontos do exercício 2 pertence.

4) Determine p para que o ponto $P = (-3, p)$ pertença:

a) ao eixo x .

b) ao 2º quadrante.

c) ao 4º quadrante.

d) à bissetriz do 2º e do 4º quadrante.

5) Seja $A = (1, 2)$, $B = (-4, -2)$, $C = (\frac{1}{2}, 4)$ e $D = (3, 0)$. Calcule:

a) $d(A, B)$ b) $d(A, D)$

c) $d(B, D)$ d) $d(B, C)$

e) $d(A, C)$ d) $d(C, D)$

6) Determine $m \in \mathbb{R}$ para que os pontos $P = (1, m)$ e $Q = (-m, 2m)$ estejam a 2 unidades de distância.

7) Se $P = (3, 2)$, determine os pontos Q do eixo OY tais que $d(P, Q) = 5$.

8) Um quadrilátero $ABCD$, de diagonais AC e BD , tem vértices $A = (-2, 2)$, $B = (-3, -2)$, $C = (3, -4)$ e $D(2, 3)$.

a) A medida de AB é maior que, menor que ou igual à medida de CD ?

b) A medida de BC é maior que, menor que ou igual à medida de AC ?

c) Qual é o comprimento da diagonal BD ?

9) Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa BC . Calculando distâncias em coordenadas, mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado BC é a metade do comprimento do lado BC .

10) Dada uma circunferência de centro C e raio r no plano π escolha um sistema de eixos coordenados de modo que a equação da circunferência seja o mais simples possível.

5.2 VETORES NO PLANO

5.2.1 Segmentos equipolentes

Dados os pontos A e B , diremos que AB é um *segmento orientado* quando fixamos A como seu ponto inicial e B como seu ponto final. Geometricamente, o segmento orientado AB é representado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento (Fig. 5.7).

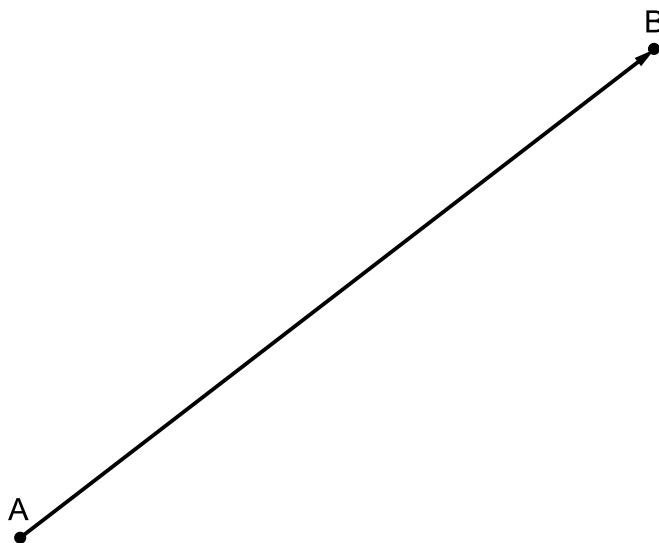


Figura 5.7: Segmento orientado AB

O *segmento nulo* é aquele cujo ponto inicial coincide com seu ponto final.

Se AB é um segmento orientado, dizemos que o segmento orientado BA é o *oposto* de AB (Fig. 5.8).

Fixada uma unidade de medida, diremos que $d(A, B)$ é o comprimento do segmento orientado AB . Desta forma, o comprimento do segmento AB é igual ao comprimento do segmento BA .

Dado o segmento AB , dizemos que r é a reta suporte de AB quando r contém

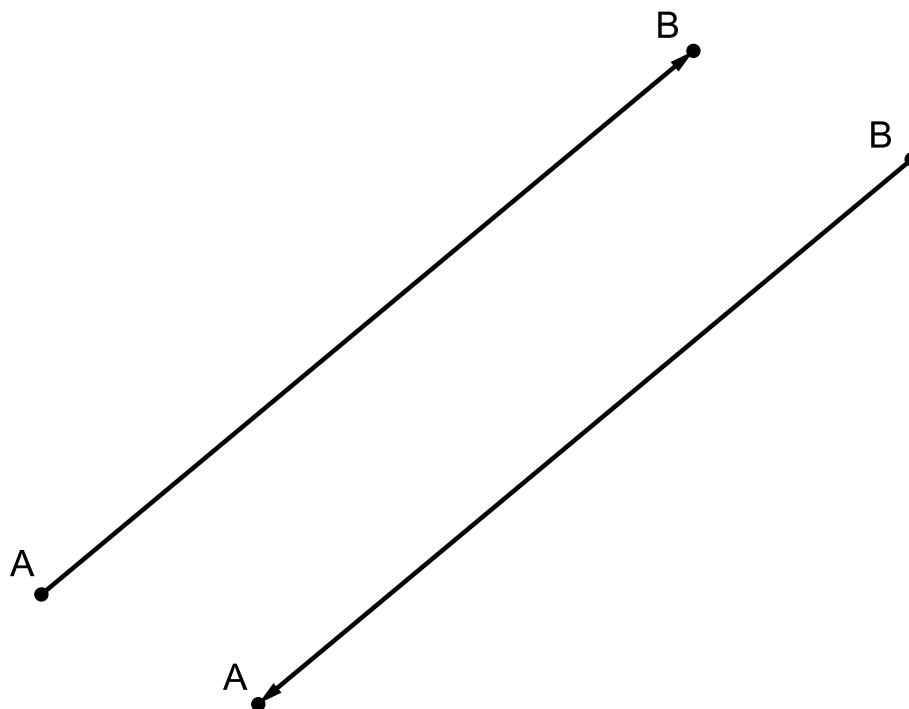


Figura 5.8: Segmentos orientados opostos

o segmento AB .

Dois segmentos orientados AB e CD , não nulos, têm mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas (Fig. 5.9).

Na figura 5.9 dizemos que AB e CD tem mesmo sentido. Já EF e HG tem sentidos opostos.

Diremos que dois segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vetor se os segmentos possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. A seguir, definiremos este conceito mais formalmente.

EQUIPOLÊNCIA

Dois segmentos AB e CD são ditos equipolentes, representamos $AB \equiv CD$, quando as três propriedades seguintes são satisfeitas:

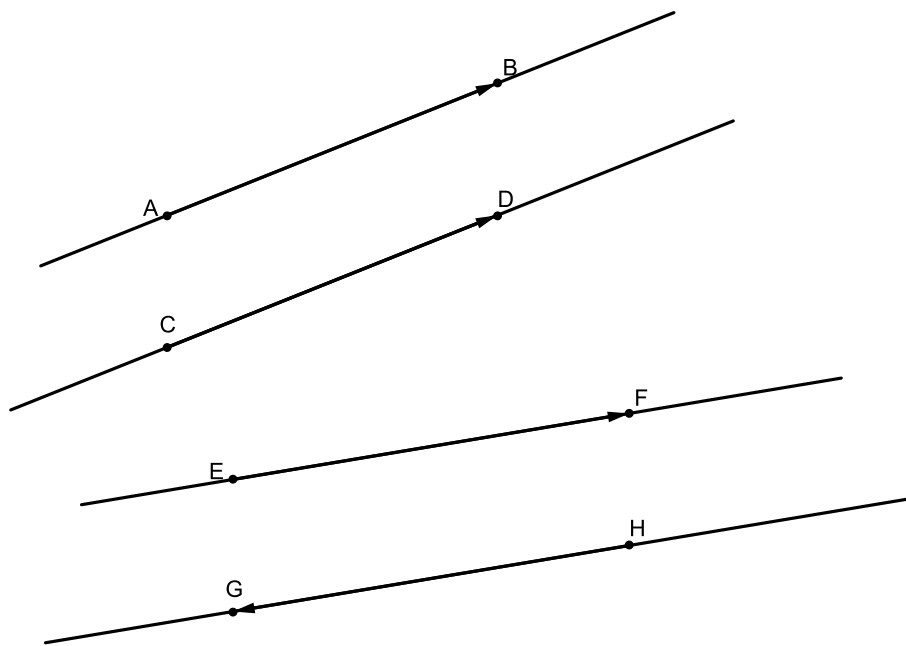


Figura 5.9: Segmentos orientados

- a) tem o mesmo comprimento;
- b) são paralelos ou colineares;
- c) tem o mesmo sentido.

5.2.2 Vetor no plano

Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de **todos** os seguimentos orientados equipolentes a AB . Cada segmento equipolente a AB é um **representante** do vetor \vec{v} .

Na Figura 5.10, AB e CD são representantes do vetor \vec{v} .

Vetores iguais

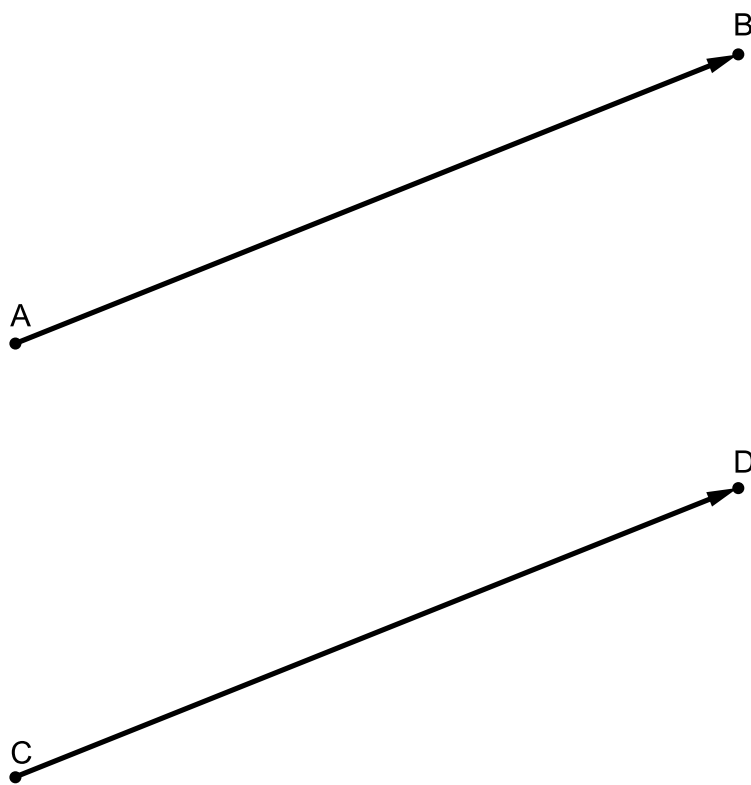


Figura 5.10: Representantes do vetor

Dois vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são iguais se, e somente se, $AB \equiv CD$. De fato, basta mostrar que os dois vetores tem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Vetor nulo

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo, e que é indicado por $\vec{0}$.

Vetores opostos

Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor \overrightarrow{BA} é o oposto de \overrightarrow{AB} e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

Vetor unitário

Um vetor \vec{v} é unitário se seu comprimento é 1. Representamos $|\vec{v}| = 1$.

Versor de um vetor

Versor de um vetor não nulo \vec{v} é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de \vec{v} .

Na prática, os vetores são manipulados através das suas representações em relação a um sistema de coordenadas dado.

Dados $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, os números $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$ são as “coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ” e escrevemos $\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Exemplo 3

Sejam $A = (3, 2)$ e $B = (-1, 4)$ e $C = (0, 5)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

R. Temos que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 4 - 2) = (-4, 2)$. Seja $D = (x_D, y_D)$, queremos $\overrightarrow{CD} = (-4, 2)$, isto é $(x_D - 0, y_D - 5) = (-4, 2)$, daí $x_D = -4$ e $y_D = 7$. Portanto, $D = (-4, 7)$. Daí podemos concluir que, dado um vetor \overrightarrow{AB} e um ponto C existe um único ponto D talque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

5.2.3 Operações com vetores

Agora iremos definir duas operações no conjunto dos vetores: a operação de “adição” e a operação de “multiplicação de vetores por números reais”.

Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$. Seja $k \in \mathbb{R}$. Define-se:

$$1) \vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

$$2) k \cdot \vec{u} = k \cdot (a, b) = (ka, kb)$$

Para somar dois vetores, somam-se suas coordenadas correspondentes. E para multiplicar o vetor por um número real, multiplica-se cada coordenada do vetor por esse número.

Observação 1: Uma forma geométrica de visualizar a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representar os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ por segmentos orientados com o mesmo início, assim $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$, onde AD é a diagonal do paralelogramo que tem dois lados consecutivos AB e AC (Fig. 5.11).

Observação 2: Geometricamente, a multiplicação de um vetor por um número real $k \neq \pm 1$ irá aumentar (ou diminuir) o comprimento do vetor k vezes (Fig. 5.11).

Exemplo 4

Dados $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 4)$, vamos obter $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{v}$

$$\text{R. } \vec{u} + \vec{v} = (-1 + 3, 2 + 4) = (2, 6)$$

$$2\vec{v} = 2(3, 4) = (6, 8)$$

Exemplo 5

Dados os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, obter o ponto $M = (x_M, y_M)$ tal que M seja o ponto médio do segmento AB .

R. Queremos que o vetor \overrightarrow{AM} seja a metade do vetor \overrightarrow{AB} , isto é,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_M - x_A, y_M - y_A) = \left(\frac{x_B - x_A}{2}, \frac{y_B - y_A}{2}\right), \text{ daí}$$

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_B + y_A}{2},$$

$$\text{Portanto } M = \left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}\right).$$

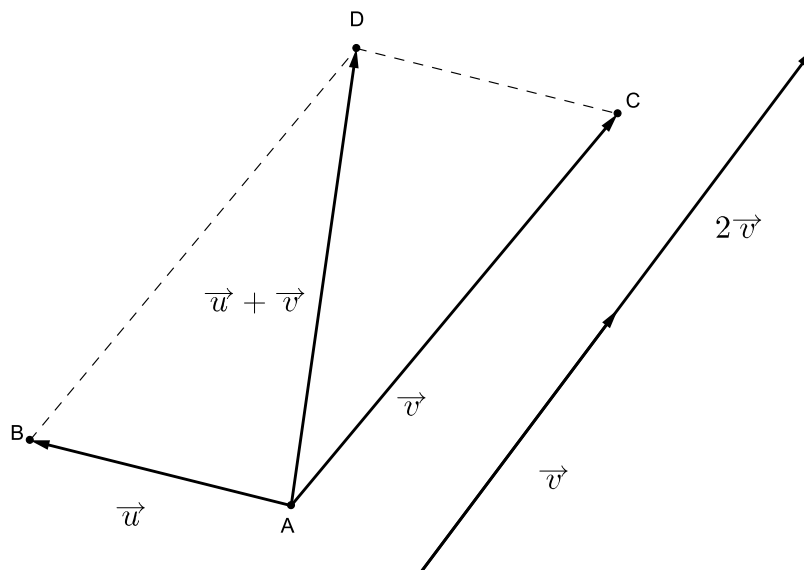


Figura 5.11: Operações com vetores

5.2.4 Produto interno

Seja $A = (2, 3)$, $B = (4, 5)$ e M o ponto médio do segmento AB . Como encontrar o centro C da circunferência tangente ao segmento AB no ponto M e de raio $r = \sqrt{2}$?

Antes de responder à pergunta acima, vamos introduzir a noção de “produto interno” que será de grande utilidade para solucionar nosso problema.

Chama-se *produto interno* de dois vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, e representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$), ao número real:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

Exemplo 6

Determine o produto interno de $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (7, -2)$

$$\text{R. } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1.7 + 3.(-2) = 1.$$

Módulo de um vetor

O módulo ou comprimento de um vetor \vec{u} é representado por $|\vec{u}|$. Se $\vec{u} = (a, b)$ então, $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 7

Determine o módulo de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (1, 2)$ e $B = (4, -2)$.

$$\text{R. } \vec{u} = (4 - 1, -2 - 2) = (3, -4), \text{ dai } |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Versor de um vetor

Como dito antes, o versor de um vetor não nulo \vec{v} é o vetor unitário de mesma direção e sentido de \vec{v} . Se \vec{u} é o versor de \vec{v} , então $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$.

$$\text{De fato, } |\vec{u}| = \left| \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} |\vec{v}| = 1.$$

Exemplo 8

Encontre o versor de $\vec{w} = (1, 3)$.

$$\text{R. Note que } |\vec{v}| = \sqrt{10}. \text{ Assim, sendo } \vec{u} \text{ o versor de } \vec{w}, \text{ temos que } \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

Propriedades do produto interno

Sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e $m \in \mathbb{R}$, então as seguintes propriedades são verdadeiras:

$$\text{I - } \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \text{ e } \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \text{ somente se } \vec{u} = (0, 0).$$

$$\text{II - } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\text{III - } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{IV} - (m \vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m \vec{v})$$

$$\text{V} - \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

Ângulo entre dois vetores

O ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , não nulos (Fig. 5.12), é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB , onde $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

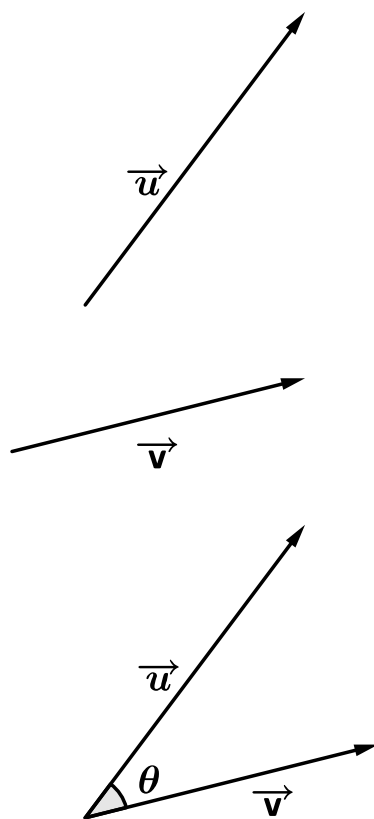


Figura 5.12: Ângulo entre dois vetores

Vamos mostrar que o ângulo formado por dois vetores está relacionado ao produto interno deles. Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo dos vetores \vec{u} e \vec{v} , então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Com efeito:

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo (Fig. 5.13), temos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad (1)$$

Por outro lado, usando as Propriedades II, III e V do produto interno, temos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Combinando (1) e (2), segue que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.

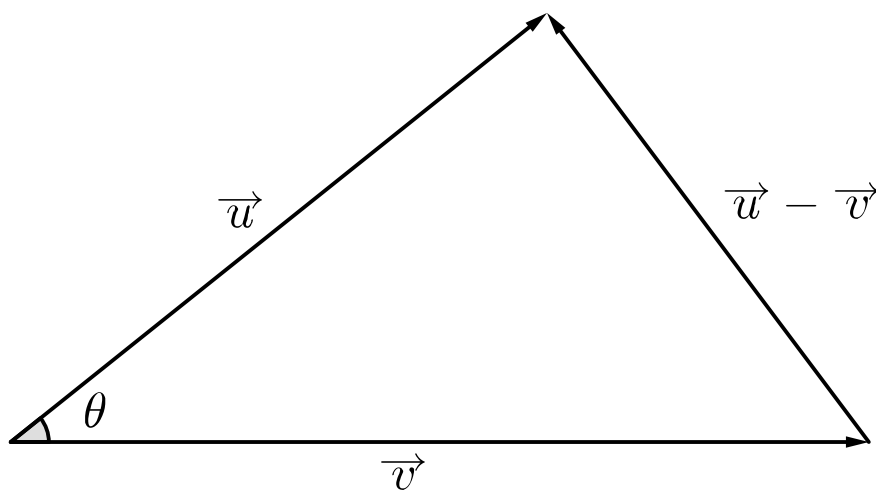


Figura 5.13: Ângulo de dois vetores

Observação:

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então usando a fórmula, concluímos que $\cos\theta = 0$, logo $\theta = 90^\circ$, isto é, θ é ângulo reto.

Portanto, para verificar se os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, basta verificar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemplo 9

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\vec{u} = (a - 1, 3)$ e $\vec{v} = (3, 2)$ sejam perpendiculares.

R. \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Assim, devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, isto é, $(a - 1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$, daí $a = -1$.

Agora, estamos em condição de solucionar o problema inicial desta seção.

“Sejam $A = (2, 3)$, $B = (4, 5)$ e M o ponto médio do segmento AB . Como encontrar o centro C da circunferência tangente ao segmento AB no ponto M e de raio $r = \sqrt{2}$?”

Seja $C = (a, b)$ o centro da circunferência. Note inicialmente que, $M = (3, 4)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ e $\overrightarrow{MC} = (a - 3, b - 4)$.

Como $r = d(C, M) = |\overrightarrow{MC}|$, temos que:

$$(a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 2 \quad (5.1)$$

Por outro lado $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, isto é:

$$b = 7 - a \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1) e resolvendo, temos que $a = 2$ ou $a = 4$. Desta forma, Se $a = 2$, temos $b = 5$; se $a = 4$, temos $b = 3$.

Portanto, temos na verdade duas circunferências que satisfazem as condições do problema e seus centros são $(2, 5)$ e $(4, 3)$.

Vejamos agora uma aplicação do produto interno na resolução de um problema de Geometria Euclidiana.

Sejam, π uma circunferência de centro C e raio r , A e B pontos de π tal que

o segmento AB é um diâmetro de π . Dado um ponto qualquer P , onde $P \neq A$ e $P \neq B$, mostre que o triângulo APB é um triângulo retângulo.

R. Considere um sistema de eixos coordenados cuja origem coincide com o centro da circunferência e que o eixo X contenha o segmento AB . (construa a figura)

Nessas condições temos que $A = (-r, 0)$ e $B = (r, 0)$, fazendo $P = (x, y)$ teremos que:

$\overrightarrow{PA} = (x+r, y)$ e $\overrightarrow{PB} = (x-r, y)$. Assim, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 + y^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0$, pois $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto o triângulo é retângulo.

5.2.5 Projção ortogonal de um vetor

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq 0$ vetores representados por segmentos orientados com a mesma origem. Se B' é o pé da perpendicular baixada do ponto B sobre a reta que contém os pontos A e C , a “projção do vetor \vec{u} na direção do vetor \vec{v} ” é o vetor $Proj_{\vec{v}} \vec{u} = \overrightarrow{AB'}$ (Fig. 5.14).

Note que, $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AC}$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

Como $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} = \vec{u} - k\vec{v}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (Fig. 5.14), segue que,

$$(\vec{u} - k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0, \text{ logo, } k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}.$$

Portanto, como $Proj_{\vec{v}} \vec{u} = k\vec{v} = k\overrightarrow{AB'}$, então

$$Proj_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Exemplo 10

Determine a projção do vetor $\vec{u} = (6, 4)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1, 1)$.

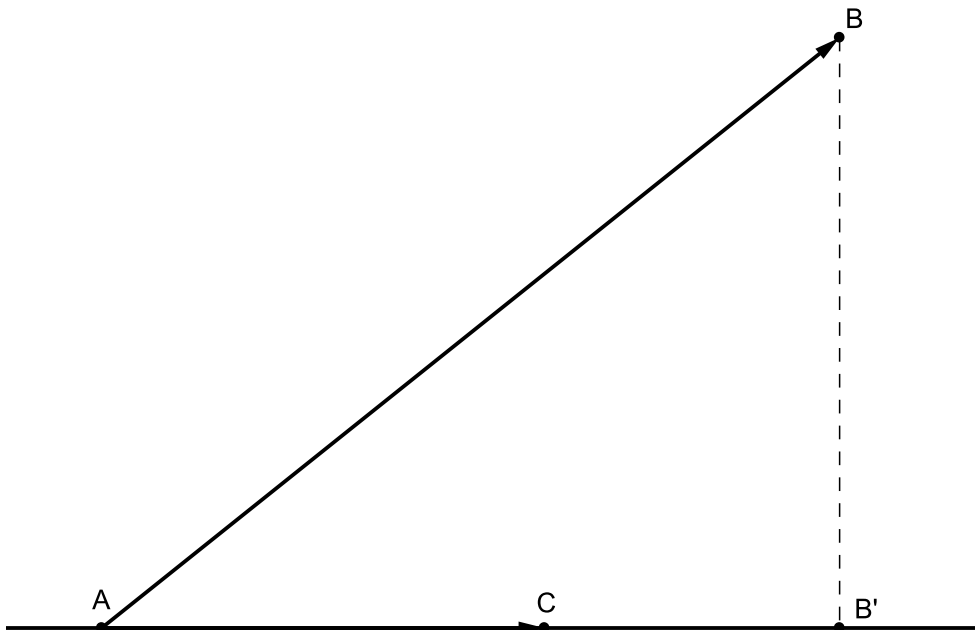


Figura 5.14: Projeção ortogonal de um vetor

$$\text{R. } Proj_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(6,1+4,1)}{1^2+1^2} \cdot (1,1) = (5,5).$$

5.2.6 Área do paralelogramo e do triângulo

Considere o paralelogramo $ABCD$ (Fig. 5.15). A área de $ABCD$ (representada por $(ABCD)$) se obtém multiplicando a medida da base $|BC|$ pela altura $|EA|$. Se θ é o ângulo ABC então, $|\vec{EA}| = |\vec{AB}| \sin \theta$ e portanto,

$$(ABCD) = |BC||AB| \sin \theta$$

Considerando, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, $\vec{u} = \vec{BC}$ e $\vec{v} = \vec{BA}$ temos:

$$(ABCD)^2 = (|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \cos \theta)^2,$$

portanto,

$$(ABCD) = \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

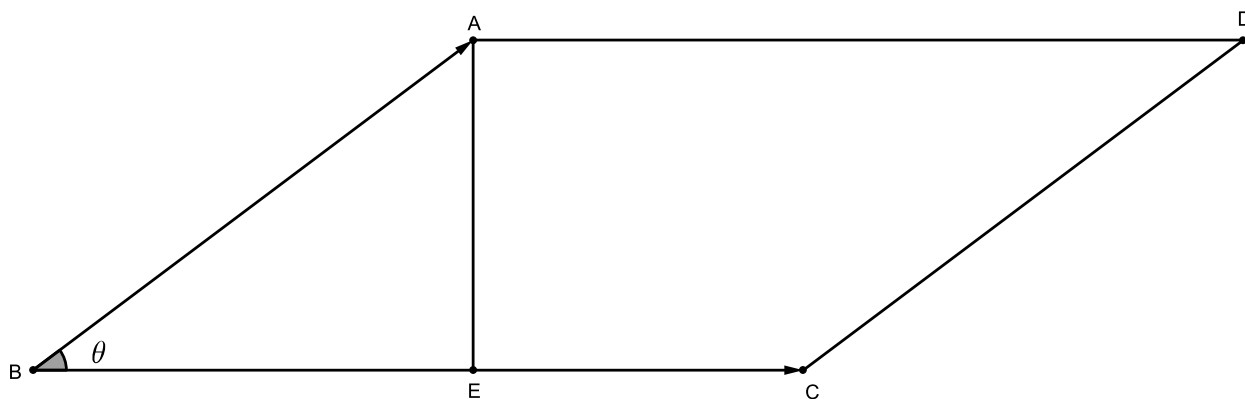


Figura 5.15: Área do Paralelogramo

Note que para calcular a área do triângulo ABC (representada por (ABC)), basta dividir a área do paralelogramo por 2.

Exemplo 11

Calcule a área do triângulo de vértices $A = (4, 2)$, $B = (6, 1)$ e $C = (3, 2)$.

R. Temos,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1) \qquad |\vec{u}|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 0) \qquad |\vec{v}|^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$$

$$\text{Portanto } (ABC) = \frac{\sqrt{5 \cdot 1 - (-2)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

5.2.7 Exercícios

1) Sendo $A = (1, -2)$, $B = (-3, 4)$, $C = (-1, -2)$ e $D = (4, 5)$. Determine as coordenadas dos vetores.

a) \overrightarrow{AB}

b) \overrightarrow{AC}

c) \overrightarrow{AD}

d) \overrightarrow{BC}

e) \overrightarrow{BD}

f) \overrightarrow{CD}

2) Determine, em cada caso, o ponto D tal que $CD \equiv AB$, onde $A = (3, -3)$ e $B = (1, 2)$ e C é o ponto:

a) $(1, -2)$

b) $(7, 6)$

c) $(-3, -4)$

d) $(-8, 1)$

3) Determine o ponto M tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, onde $O = (0, 0)$ e:

a) $A = (1, 2)$ e $B = (1, 1)$

b) $A = (3, -1)$ e $B = (-1, -1)$

c) $A = (-4, -3)$ e $B = (1, 2)$

d) $A = (-2, \frac{1}{2})$ e $B = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

4) Seja $ABCD$ um paralelogramo, determine as coordenadas do ponto D , sabendo que $A = (3, 3)$, $B = (5, 6)$ e $C = (10, 2)$.

5) Sejam $\vec{u} = (4, -2)$ e $\vec{v} = (1, 3)$, determine:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $-2\vec{u} + 3\vec{v}$

d) $\frac{1}{3}\vec{u} - 3\vec{v}$

6) Sejam $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 0)$. Determine os pontos que dividem o

segmento AB em 5 segmentos de igual comprimento.

7) Encontre a e b tal que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1)$ e $\vec{w} = (11, -5)$.

8) Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (-1, 4)$ e $\vec{v} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

9) Usando o produto interno, mostre que o triângulo ABC , onde $A = (5, 6)$, $B = (3, 3)$ e $C = (9, -1)$ é um triângulo retângulo.

10) Prove as cinco propriedades do produto interno.

11) Considere o quadrado $ABCD$, onde $A = (1, 2)$ e $B = (-3, -1)$. Determine as coordenadas dos possíveis pontos C e D .

12) Dados $A = (3, 7)$, $B = (1, 1)$ e $C = (9, 6)$, determine a projeção ortogonal de A sobre a reta BC .

13) Seja o paralelogramo $ABCD$, onde $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$ e $C = (-2, 4)$.

a) Determine o ponto D .

b) Calcule a área de $ABCD$.

5.3 ESTUDO DA RETA

Neste tópico, vamos estabelecer uma conexão entre retas do plano e equações. Para isso, estudaremos três tipos de equações: paramétricas, cartesianas e reduzida.

5.3.1 Equações paramétricas

É fácil notar que um vetor \vec{v} é paralelo à reta r se, e somente se, $\vec{v} = \lambda \overrightarrow{AB}$, onde $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ e A e B são dois pontos quaisquer da reta r .

Se r é uma reta que passa pelo ponto $A = (a, b)$ e tem a direção de $\vec{v} = (\alpha, \beta) \neq \vec{0}$, sendo $P = (x, y) \in r$ temos:

$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ é múltiplo de \vec{v} . Então,

$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = k\vec{v}$ para algum $k \in \mathbb{R}$, daí $P = A + k\vec{v}$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

Logo $(x, y) = (a, b) + (k\alpha, k\beta) = (a + k\alpha, b + k\beta)$. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha k \\ y = b + \beta k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Essas são as equações paramétricas de r . Note que k é determinado de uma única forma por P . Chamamos k de parâmetro de $P \in \mathbb{R}$. O vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ é denominado vetor diretor da reta r .

Exemplo 12

Determine as equações paramétricas da reta r que passa por $A = (-2, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-2, 2)$.

R. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta r , daí temos que as equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 13

Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-2, 1)$.

R. Determinar as equações paramétricas de r passando por A e B é o mesmo que determinar as equações paramétricas da reta que passa por A e tem vetor diretor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2, 1)$. Assim temos:

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Essas são as equações paramétricas da reta r .

5.3.2 Equação cartesiana ou geral da reta

Para caracterizar a equação cartesiana de uma reta, vamos usar a condição de perpendicularidade de dois vetores, isto é, o produto interno deles é zero.

Um vetor $\vec{u} \neq 0$ é perpendicular a uma reta r se os vetores \vec{u} e \overrightarrow{AB} são perpendiculares, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$. Para qualquer ponto $P = (x, y)$ da reta r , teremos que $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$. Então,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by = ax_0 + by_0$$

Fazendo $c = ax_0 + by_0$ temos:

$$r : ax + by = c$$

Essa é a equação cartesiana da reta r .

Note que, como estabelecido, dada uma reta de equação cartesiana $r : ax + by = c$, teremos que o vetor $\vec{u} = (a, b)$ é perpendicular à reta r .

Exemplo 14

Encontrar a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto $A = (1, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (1, -2)$.

R. A equação procurada é $x - 2y = c$, onde c é obtido quando $(x, y) = (1, 3)$, isto é, $c = 1 - 2 \cdot 3 = -5$, logo a equação cartesiana da reta é $x - 2y = -5$.

Uma informação de grande utilidade é saber que o vetor $\vec{v} = (a, b)$ é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (b, -a)$.

De fato, $\vec{v} \cdot \vec{u} = ab - ab = 0$, logo \vec{v} e \vec{u} são perpendiculares.

Exemplo 15

Qual é a equação cartesiana da reta r que passa por $(-3, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (-1, 2)$?

R. Note que $\vec{u} = (2, 1)$ é perpendicular a \vec{v} , ou seja, \vec{u} é perpendicular à reta r . Assim, a equação cartesiana de r é:

$$2x + y = 2 \cdot (-3) + 2 = -4. \text{ Portanto,}$$

$$r : 2x + y = -4$$

Exemplo 16

Sejam as retas $r : ax + by = c$ e $s : a'x + b'y = c'$.

a) Que condição devemos ter para que r e s sejam paralelas?

R. Para que r e s sejam paralelas, basta que os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a', b')$ sejam paralelos, isto é, basta que um seja múltiplo do outro. Dito de outra forma, existe λ real tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

b) Que condição devemos ter para que r e s sejam perpendiculares?

R. Note que $\vec{v} = (b, -a)$ é o vetor diretor de r . E $\vec{u} = (b', -a')$ é o vetor

diretor de s .

Para que r e s sejam perpendiculares, seus vetores diretores devem ser perpendiculares, ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, daí $aa' + bb' = 0$.

Portanto, para que r e s sejam perpendiculares devemos ter $aa' + bb' = 0$.

5.3.3 Equação reduzida da reta

Consideremos a reta r de equação cartesiana $ax + by = c$, perpendicular a $\vec{v} = (a, b)$. Consideremos dois casos:

Se $b = 0$, como $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, temos que $a \neq 0$, assim $x = \frac{c}{a}$. Essa é a reta dita vertical.

Se $b \neq 0$, a equação cartesiana $ax + by = c$ é equivalente à $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$, temos que $y = mx + n$. Essa é a equação reduzida da reta r .

Se considerarmos o ponto de abscissa 0, ou seja, $x = 0$, então teremos que $y = n$. Assim, temos uma importante informação sobre a reta r . Ela intersecta o eixo OY em n .

A constante m é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro da reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m$$

Observação 1: O número m chama-se inclinação ou coeficiente angular da reta $r : y = mx + n$.

Observação 2: O número n chama-se coeficiente linear da reta $r : y = mx + n$.

A constante m nos fornece informações a respeito do crescimento de $y =$

$mx + n$.

Se $m > 0$, a função $y = mx + n$ é crescente, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$ (Fig. 5.16). Ou seja, quando x cresce, y também cresce.

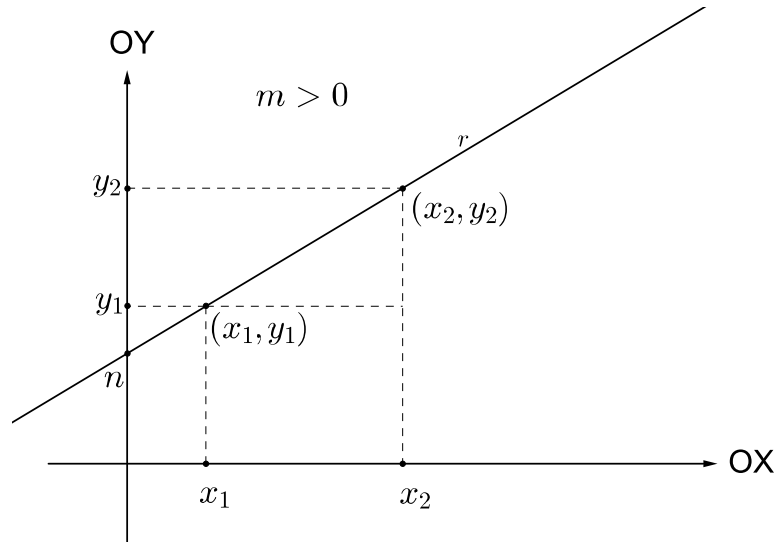


Figura 5.16: Para $m > 0$, $y = mx + n$ é crescente.

Se $m < 0$, a função $y = mx + n$ é decrescente, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$ (Fig. 5.17). Ou seja, quando x cresce, y diminui.

Se $m = 0$, a função $y = mx + n$ é constante, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = n$ é uma reta horizontal. (Fig. 5.18).

A interseção das retas $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ é o ponto $P = (x_1, y_1)$ (Fig. 5.19), que satisfaz as duas equações, isto é, cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{cases} -mx + y = n \\ -m'x + y = n' \end{cases}$$

As retas são paralelas quando não existe um ponto comum a ambas, isto é, quando o sistema acima não possui solução. O sistema é equivalente a

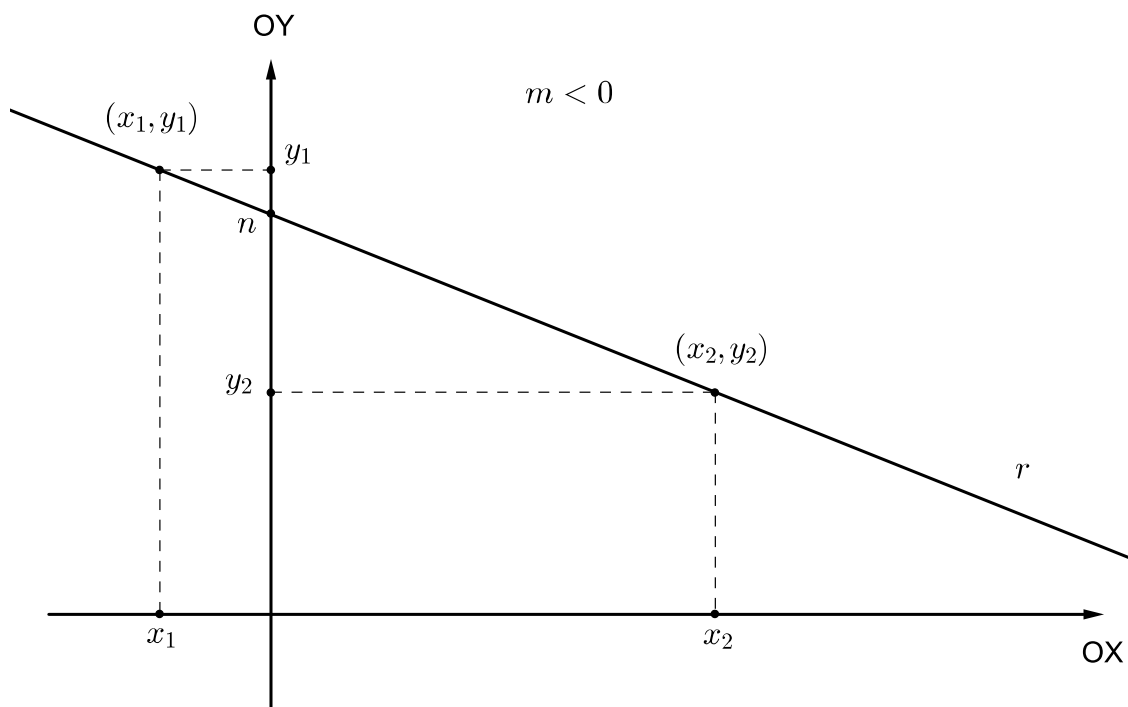


Figura 5.17: Para $m < 0$, $y = mx + n$ é decrescente.

$$\begin{cases} -mx + y = n \\ (m - m')x = n' - n \end{cases}$$

O sistema não possui solução se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

Portanto, as retas $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$ são paralelas se, e somente se, possuem a mesma inclinação e cortam o eixo OY em pontos distintos, isto é, $n \neq n'$.

Seja $r : y = mx + n$ e $s : y = m'x + n'$, estas equações reduzidas são equivalente às cartesianas $r : -mx + y = n$ e $s : -m'x + y = n'$.

Sabemos que $\vec{u} = (-m, 1)$ é um vetor perpendicular a r e $\vec{v} = (m', -1)$ é perpendicular a s . Assim, para que r e s sejam perpendiculares, devemos ter \vec{u} perpendicular a \vec{v} , ou seja, devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

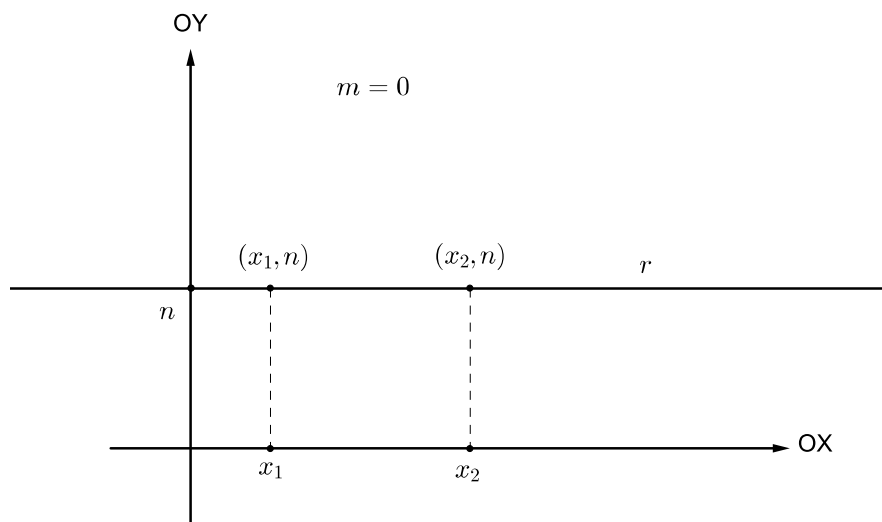


Figura 5.18: Para $m = 0$, $y = mx + n$ é constante.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow m.m' + 1 = 0 \Leftrightarrow m.m' = -1$$

Portanto, as retas r e s de equações $y = mx + n$ e $y = m'x + n'$, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $m.m' = -1$.

5.3.4 Exercícios

- 1) Mostre que os pontos $A = (-2, 2)$, $B = (1, 3)$ e $C = (7, 5)$ são colineares.
- 2) Determine a reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 1)$ e é paralela à reta $s : -x + 3y = 18$
- 3) Determine a reta r que passa pelo ponto $(-2, 0)$ e é perpendicular à reta $s : -\frac{7}{2}x + 8y = -8$.

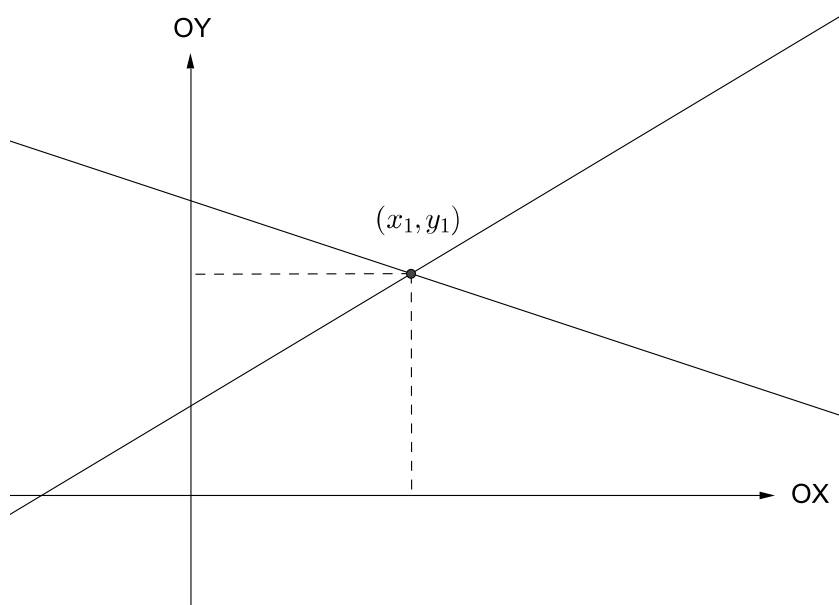


Figura 5.19: Interseção de retas

- 4) Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ as retas $(\lambda - 1)x + 6y = -1$ e $4x + (\lambda + 1)y = 1$ são paralelas?
- 5) Sendo $A = (1, 4)$ e $B = (3, 0)$ determine a equação da mediatriz do segmento AB .
- 6) Considere o quadrado $ABCD$ de diagonais AC e BD . Determine as coordenadas dos pontos B e D , sabendo que $A = (0, 0)$ e $C = (5, 1)$.
- 7) Seja ABC um triângulo qualquer. Mostre, usando um sistema de eixos ortogonais adequado, que as alturas AD , BE e CF relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente, se intesectam num único ponto, chamado *ortocentro* do triângulo.
- 8) Considere o triângulo ABC , onde $A = (-2, 9)$, $B = (16, 7)$ e $C = (7, -2)$.
- a) Mostre que as medianas do triângulo ABC se intersectam num único ponto.
- b) Seja G o ponto de interseção das medianas de ABC . Mostre que G divide a mediana na proporção $2 : 1$.

c) Mostre que em um triângulo qualquer as medianas se intersectam num único ponto.

9) Dado o triângulo ABC , seja M e N os pontos médios de AB e BC , respectivamente.

a) Prove que o segmento MN é paralelo ao segmento AC .

b) Mostre que $d(M, N) = \frac{d(A, C)}{2}$.

5.4 UM POUCO DE GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL

Neste tópico, daremos uma pequena e singela demonstração do uso dos vetores no espaço. Tudo o que se faz aqui é uma expansão do que foi estudado no caso bidimensional.

5.4.1 Coordenadas no espaço

Dado um espaço euclidiano tridimensional E , um sistema de coordenadas (cartesianas) em E é definido por três eixos, OX , OY e OZ , perpendiculares dois a dois e com mesma origem O (Fig. 5.20).

A cada ponto P do espaço corresponde uma única terna (a, b, c) de números reais denotadas por abscissa, ordenada e cota, respectivamente (Fig. 5.21).

O estudo de Geometria Analítica no espaço é uma extensão natural do estudo feito no plano, já que com as adequações necessárias tudo segue de forma simples.

Por exemplo, dados os pontos $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ no espaço, com uma aplicação do teorema de Pitágoras (Fig. 5.22), temos que:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

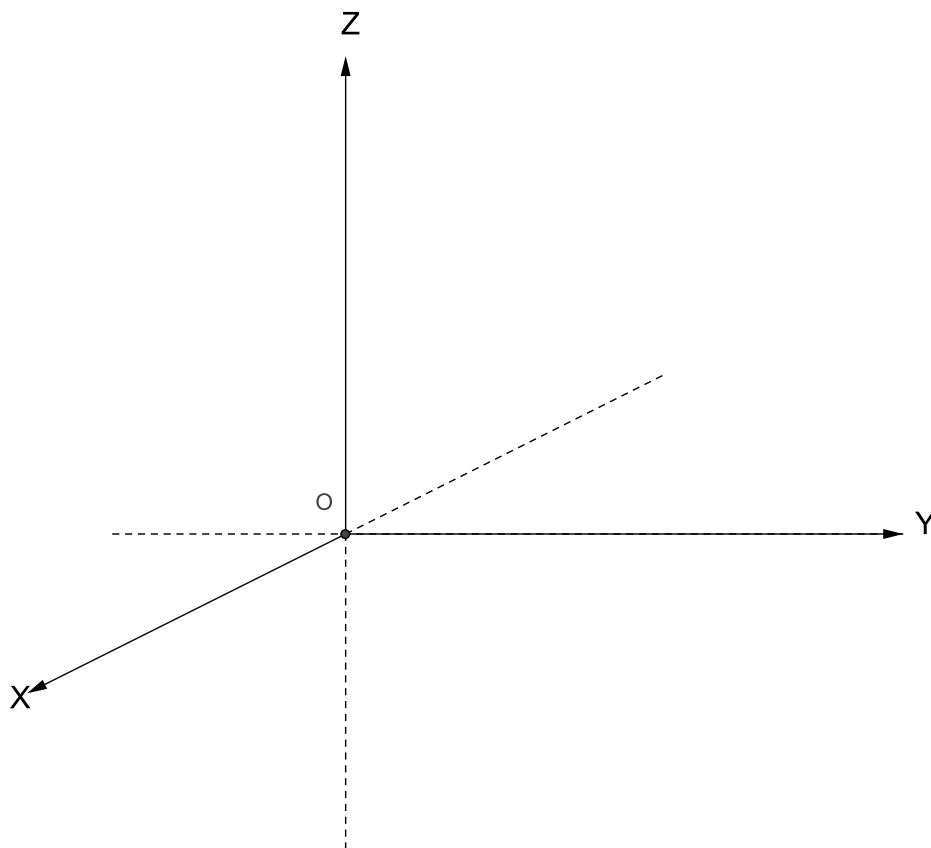


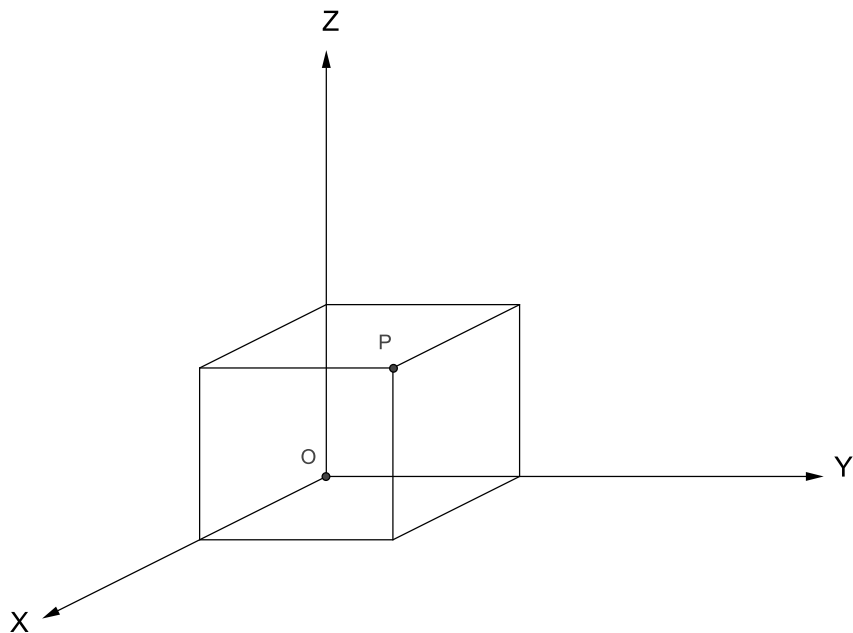
Figura 5.20: Sistema de coordenadas no espaço

5.4.2 Vetores no espaço

A definição de seguimentos equipolentes no espaço é a mesma feita no estudo bidimensional de vetores. Assim, de forma análoga, definiremos vetores no espaço.

Sejam A e B pontos do espaço. O vetor \vec{v} é o conjunto de segmentos orientados equipolentes a AB . Cada seguimento orientado equipolente AB é um representante do vetor \vec{v} .

A igualdade de vetores, o vetor nulo, vetores opostos, vetor unitário, versor de um vetor, módulo de um vetor e ângulos, apresentadas no estudo de vetores no plano,

Figura 5.21: Ponto P

continuam valendo no espaço.

Consideremos os vetores $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ e $k \in \mathbb{R}$. Desta forma, seguem as definições:

1) A adição de \vec{u} com \vec{v} é definida como: $\vec{u} + \vec{v} = (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$.

2) A multiplicação do vetor \vec{u} com o escalar k é definida como: $k\vec{u} = (ka, kb, kc)$.

Exemplo 17

Dados $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, vamos obter $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

R. $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(1, 2, -3) - 3(-1, 0, 2) = (2, 4, -6) + (3, 0, -6) = (5, 4, -12)$.

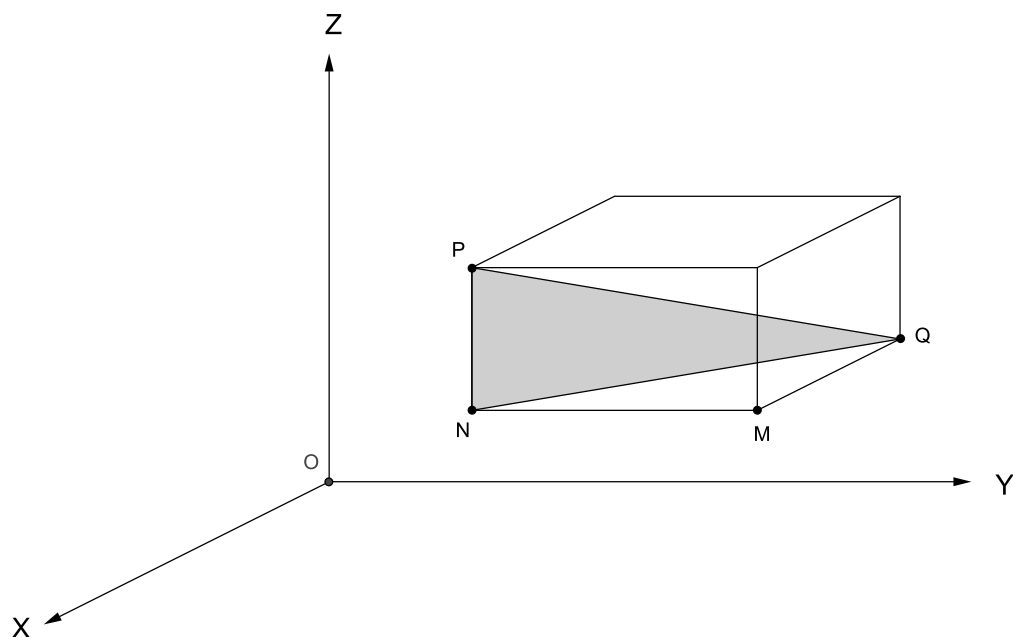


Figura 5.22: Distância de pontos no espaço

5.4.3 Produto interno

Assim como foi definido no plano, o produto interno de $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$ representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou (\vec{u}, \vec{v}) é o número real dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf.$$

Com a noção de módulo de um vetor e ângulo entre vetores podemos, por um cálculo análogo ao efetuado para o produto interno no plano, obter que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Com essa última fórmula para o produto interno, temos que \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

De fato,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

5.4.4 Retas no espaço

Dado um ponto A e um vetor \vec{v} , vamos determinar a reta r que tem direção \vec{v} e contém o ponto A . Para que um ponto P pertença a reta é necessário e suficiente que \overrightarrow{AP} e \vec{v} sejam colineares, isto é, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow P - A = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow P = A + t \cdot \vec{v}.$$

Dizemos que $P = A + t \cdot \vec{v}$ é a equação vetorial da reta r .

Se tivermos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, temos que o ponto $P = (x, y, z)$ pertence a reta quando:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t \cdot (a, b, c).$$

Usando a igualdade de pontos temos que:

$$r : \begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Essas três equações são chamadas equações paramétricas de r .

5.4.5 Exercícios

1) Seja o paralelepípedo $ABCDEFGH$, determine os pontos E , F , G e H , sabendo que $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 3, 2)$, $C = (3, 4, 1)$ e $D = (-2, 2, 1)$.

2) Determine as equações paramétricas das retas r , paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e que passa pelo ponto $A = (2, -1, 0)$, e s que passa por $B = (0, 0, 1)$ e $C = (0, 1, -1)$. A reta r intersecta s ?

3) Determinar a reta r que passa pelo ponto $A = (1, -1, 0)$ e é perpendicular à reta $s : P = B + t \cdot \vec{v}$, onde $B = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. (sugestão: encontre um vetor perpendicular a s .)

4) Dados os pontos $A = (2, 4, 1)$ e $B = (3, 0, 5)$, determinar o ponto $P = (x, y, z)$ que divide o segmento AB na razão $r = -\frac{1}{3}$.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho foi possível mostrar a importância de a Geometria Analítica ser abordada sob uma ótica vetorial. Vetores é um assunto de fácil introdução, já é abordado no estudo de Física e tem várias aplicações em diversos campos.

De igual modo, observou-se que os livros didáticos utilizados no Ensino Médio, alguns analisados em 2001, continuaram com muitos de seus vícios em 2012 e, portanto, pouco se mudou na abordagem do ensino e, naturalmente, sua evolução na aprendizagem foi limitada. Ainda se nota a ausência de vetores em Geometria Analítica.

Com base nessas constatações, apresentamos uma proposta simples que faz uso de vetores para abordar o estudo da reta. Procuramos suprir as lacunas deixadas nos livros analisados, no que se refere ao estudo dos vetores, e que foram apontadas por Elon Lages Lima em sua obra, muito utilizada neste estudo.

Cabe salientar que a proposta de material/atividade desenvolvida deu mais ênfase à utilização de vetores para o estudo da reta e essa não é a única aplicação que pode ser feita no Ensino Médio, pois toda a Geometria Analítica pode ser abordada dessa forma. Como exemplo, podemos ter possíveis continuações no estudo da circunferência e das cônicas. Além disso, vetores podem ser expandidos para o espaço e desta forma fazendo o estudo de retas e distâncias no espaço e de planos. Enfim, há vários motivos para se falar de vetores.

Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, Geraldo. **Revista do Professor de Matemática**. número. 71, ano 28, 1º quadrimestre/2010.
- [2] Dante, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações - Volume 3**. São Paulo: Ática, 2011.
- [3] INEP. Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA. Brasília, 2009. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-de-avaliacao-de-alunos> Acesso em 06/11/2012.
- [4] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N. **Matemática: Ciência e Aplicações - Volume 3**. São Paulo: Saraiva, 2011.
- [5] Lima, Elon Lages. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro, 2001.
- [6] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. **A matemática do Ensino Médio - Volume 3**. Rio de Janeiro, 2006.
- [7] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. **A matemática do Ensino Médio - Volume 4**. Rio de Janeiro, 2007.
- [8] Lima, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.
- [9] Lima, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2011.

-
- [10] Paiva, M. **Matemática - Volume 3**. São Paulo: Moderna, 2011.
- [11] Pinto, Neusa Bertoni. **Marcas históricas da matemática moderna no Brasil**. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 5, n.16, p.25-38, set./dez. 2005.
- [12] Steinbruch, A.; Winteerle, P. **Geometria Analítica**. 2ª edição, São Paulo, 1987.
- [13] Wagner, Eduardo. **Sobre o Ensino de Geometria Analítica**. Revista do Professor de Matemática, número. 41, 2010.